

Vale a pena ensinar Matemática?

ANTÓNIO M. FERNANDES

VALE A PENA ENSINAR MATEMÁTICA?

Olhando o Universo em redor, perscrutando não apenas o espaço mas também o tempo que alberga a história do conhecimento humano, facilmente se reconhece que ele se compõe, de igual forma, de matéria concreta e relações matemáticas. No mínimo é desta forma que se nos apresenta e o nosso conhecimento acerca dele é possível.

Perante tão avassaladora evidência, a questão *vale a pena ensinar Matemática?* parece vazia de importância: um mero adereço retórico. No entanto, fundamentar a necessidade do ensino da Matemática neste carácter utilitário, implica a aceitação de que a Educação é mais um *treino para o uso* e menos um *catalisador* de processos de crescimento e criação de capacidade cognitiva¹.

Assim, procurando razões justificativas do ensino da Matemática, procurarei acima de tudo *razões intrínsecas* i.e., residentes na natureza da Matemática, na sua essência, e na essência da sua actividade². Uma tal tarefa pressupõe, ou pelo menos parece pressupor, uma *definição* do termo *Matemática*³. A busca de uma tal definição, ou a mera indagação da possibilidade de uma tal definição, é uma oportunidade para descrever, ainda que brevemente, o âmago da actividade Matemática ilustrando aspectos fundamentais do pensamento matemático, uma oportunidade cujo valor me impede que a enjeite.

PROCURANDO UMA DEFINIÇÃO DO TERMO MATEMÁTICA

No século 3 a.C. o termo *Matemática* podia confundir-se com o conteúdo dos *Elementos* de Euclides. Tal como surge nos *Elementos* ela é em larga medida uma versão da realidade observável. Os termos primitivos correspondem a abstrações que emanam da realidade concreta. Próclo⁴,⁴ no seu comentário ao primeiro livro dos *Elementos*, refere que as entidades matemáticas ocupam uma posição intermédia entre as coisas simples e indivisíveis (as formas platónicas) e aquelas que possuem partes e são complexas na sua composição, os objectos físicos. Noutros termos, as entidades matemáticas são

mais complexas que as ideias simples, mas mais precisas que as coisas físicas⁵⁶.

Os *Elementos* possuem a estrutura prescrita por Aristóteles nos *Analíticos Posteriores* para o que viria a ser designado de *modelo clássico da ciência*. Este modelo envolvia uma distinção entre os métodos analítico e sintético, o método axiomático, e a lógica enquanto ciência. Muito genericamente, uma ciência é conforme a este modelo se consiste num sistema de termos e proposições. Neste sistema, os *termos básicos* são definidos e todos os outros se definem a partir destes. Além disso, consideram-se algumas *proposições fundamentais* (axiomas) envolvendo esses termos, proposições estas cuja veracidade deve ser *imediatamente reconhecível*. Todas as outras *verdades* devem ser demonstradas a partir destas.

Apesar de abstratos, os objectos da geometria euclidiana mantêm uma relação íntima com a realidade física observável: o requisito para a escolha dos axiomas i.e., a sua veracidade imediatamente reconhecível, não pode ser cumprido senão por recurso a uma *intuição empírica*. O apelo a este tipo de intuição ocorre até de uma forma subconsciente, ao ponto dela se ver integrada nas próprias demonstrações que, desta forma, possuem uma natureza híbrida, logico-intuitiva.

A primeira proposição dos *Elementos* estabelece a possibilidade de, dado um segmento AB, construir um triângulo equilátero de lado AB. Esta proposição não se pode estabelecer através de uma demonstração que use como hipóteses os axiomas de Euclides. A *demonstração* que consta nos *Elementos* tem como suporte a figura 1. A existência das duas circunferências é garantida pelo terceiro postulado. No entanto, a existência do ponto C, que supostamente resulta da intersecção das duas circunferências, não se pode estabelecer a partir dos axiomas. Este não é um caso isolado, a axiomática euclidiana é insuficiente para estabelecer (em termos estritamente lógicos) todo o corpo proposicional contido nos *Elementos*⁷. Existe nesta prova o apelo a uma evidência empírica que reside ultimamente na *realidade física*.

¹E de outros tipos que por me interessarem menos nesta exposição, ignorarei.

²Quero dar razão a Oswald Veblen: «A Matemática é uma das emanações fundamentais do espírito humano—algo que deve ser valorizado em si mesmo, e por si mesmo, como a arte ou a poesia.»

³Encontramo-nos essencialmente nas mesmas circunstâncias que Platão, no Ménon. Depois de se questionar se a virtude se pode ensinar, refere: «Estou tão longe de saber se a virtude pode ser ensinada se nem sequer sei o que a virtude é.»

⁴Próclo de Atenas (412 d.C.–485 d.C.)

⁵Ao contrário dos objectos físicos, as entidades matemáticas são, bem como as suas propriedades, eternas e não sujeitas a acções causais, por outro lado não são como as entidades inteligíveis correspondentes às formas platónicas, pois podem compor-se e decompor-se e representar-se através do raciocínio discursivo. (As formas, embora acessíveis à mente são independentes dela, e não são racionalmente analisáveis.)

⁶É ainda Próclo que atribui a Platão a esperança de que as entidades matemáticas nos pudessem aproximar da compreensão destas ideias puras.

⁷Emparticular faltam os denominados axiomas de continuidade que Hilbert haveria de considerar nos seus Fundamentos da Geometria

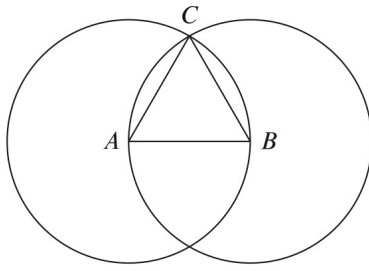


Figura 1. Elementos, Livro I, Proposição 1

As coisas iriam mudar, mas não antes do início do século 19. É claro que o curso da matemática não se resumiu, entretanto, a construções de régua e compasso e.g., os sistemas numéricos evoluíram dos números naturais à consideração dos números complexos, um caminho aberto pelo desenvolvimento da álgebra. Descartes e Fermat, estabelecendo as bases da geometria analítica abriram caminho ao desenvolvimento do cálculo, o palco onde actuam noções fundamentais como a de derivada ou de integral. Tudo isto é em certo sentido acomodável no contexto euclidiano. Mas, como referimos as coisas iriam mudar. Chegados ao século 19, a natureza da Matemática bem como o seu papel estavam prestes a ser revistos numa concepção radicalmente diferente.

Um dos axiomas dos *Elementos*, o famoso *quinto postulado*, que é equivalente ao facto de por um ponto exterior a uma recta passar uma única paralela⁸ foi, desde o momento inicial, motivo de controvérsia. Muitos matemáticos achavam que ele não cumpria, ao contrário dos restantes axiomas, o requisito de possuir um carácter de verdade imediatamente reconhecível. Tentou-se assim demonstrá-lo a partir dos outros axiomas.

A partir de certa altura, especialmente depois de Girolamo Saccheri (1667–1733) ter publicado (Milão, 1733) o seu *Euclides ab omni naevo vindicatus*, tentou-se estabelecer o quinto postulado, por redução ao absurdo, admitindo a sua negação. É precisamente este o contexto de investigação de Nikolai Lobachevsky (1792–1856). Trabalhando com a hipótese de por um ponto exterior a uma recta poder passar mais que uma paralela, Lobachevsky conclui em 1829 que uma geometria onde este princípio é válido tem a mesma consistência da geometria euclidiana. Ele chegou a esta conclusão não porque tivesse um modelo geométrico do novo axioma, mas antecipando numa forma ainda embrionária, é certo, uma ferramenta moderna de verificação de consistência—a interpretação. Com efeito, depois de ter estabelecido as fórmulas da trigonometria hiperbólica (o nome dado à nova geometria), ele verificou que elas se obtinham das fórmulas correspondentes para a geometria euclidiana através de uma simples manipulação algébrica. Daqui ele concluiu que se uma contradição se pudesse derivar

⁸ Este enunciado corresponde ao denominado axioma de Playfair que foi enunciado nesta forma pelo matemático escocês John Playfair (1748–1819).

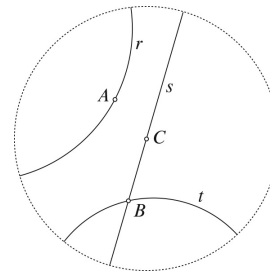


Figura 2. O disco de Poincaré

na nova geometria então a transformação algébrica permitia transformar essa demonstração na demonstração de uma contradição na geometria euclidiana, i.e. do ponto de vista lógico a nova geometria não possui um estatuto inferior ao da geometria euclidiana.

A figura 2 exhibe um modelo da geometria hiperbólica—o *disco de Poincaré* (que constitui uma interpretação da geometria hiperbólica no plano euclidiano). O modelo em causa corresponde ao interior do círculo de centro em (0,0) e raio unitário. Neste modelo, por *ponto* entende-se um ponto no interior desse círculo e por *recta* entende-se ou um diâmetro, ou então a intersecção de uma circunferência que é ortogonal à circunferência unitária (as tangentes nos pontos de intersecção são ortogonais) com o círculo (na figura, r,s,t são *rectas*). Estes pontos e rectas constituem um modelo da geometria hiperbólica onde é claro que por um ponto exterior a uma recta passa mais que uma recta que não intersecta a recta original (no caso da figura pelo ponto B podem ver-se duas rectas, s,t, que não intersectam a recta r), em clara contradição com o axioma de Playfair e, consequentemente, com o postulado 5.

Temos então duas geometrias logicamente coerentes mas, incompatíveis entre si i.e., a intuição fundamental de espaço (se existe) não pode ser descrita por ambas. E, no entanto, ambas podem ser consideradas frutos legítimos da actividade matemática e a Matemática deixa de poder ser uma mera emanção do universo concreto. A partir deste momento a Matemática passa a ser, como dizia o filósofo australiano David Malet Armstrong, «acerca de todos os mundos possíveis».

O impacto do modelo de Poincaré não se esgota no seu *valor matemático*. Dado que as rectas (caminhos mais curtos entre dois pontos) podem agora ser arcos de circunferência é claro que os *habitantes* deste universo não medem distâncias de uma forma euclidiana. A distância ds entre pontos (x,y) e (x+dx, y+dy) é, no contexto euclidiano, medida através do teorema de Pitágoras, i.e. satisfaz a relação $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Para pontos no universo de Poincaré, os habitantes medem uma distância entre aqueles pontos, ds, que satisfaz a fórmula $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$, uma variação da distância euclidiana. Mas não uma variação trivial, de facto possui uma característica interessante: à mesma translação (euclidiana) (dx,dy) de um ponto (x,y) corresponde uma distância muito maior (tendendo para infinito) no disco de Poincaré, à

medida que (x,y) se situa perto do bordo do círculo. Dito de outra forma, se um habitante deste universo se desloca em relação aos seus limites ele vai, do ponto de vista do plano euclidiano (onde este universo está embebido) ficando sucessivamente mais pequeno (embora ele não tenha consciência disso, pois do seu próprio ponto de vista tem sempre o mesmo tamanho). Desta forma, nunca lhe é permitido alcançar essa fronteira.

Para Poincaré, esta circunstância mostra como é impossível podermos saber se dados dois modelos da realidade, um deles é mais adequado a essa realidade ou não—os habitantes do universo de Poincaré julgam legitimamente que a geometria que descreve o seu universo é hiperbólica e que ele é infinito. No entanto, o seu mundo insere-se num mais vasto universo euclidiano e é claramente finito⁹. Esta sequência de eventos mostra que no passado não houve a possibilidade de obter uma definição categórica do termo *Matemática* (nenhuma tentativa de definição resistiria a uma tão radical alteração conceptual). Muito provavelmente, também não teremos essa possibilidade no futuro. Sendo acerca de todos os mundos possíveis, a Matemática é acerca de muitas e variadas coisas, muitas vezes realidades mutuamente inconciliáveis. O estado actual das coisas mostra que todos estes *universos conceptuais* se podem descrever na denominada *teoria de conjuntos*. Mas, por mais tentadora que pareça a possibilidade de uma teoria de conjuntos reivindicar para si o papel dos *Elementos* de Euclides, o fenómeno da *incompletude* (de Gödel) mostra como uma tal possibilidade é irrealista.

A teoria de conjuntos é uma teoria axiomática e, depois de Gödel, sabemos que as teorias axiomáticas (as significativas, pelo menos) são necessariamente incompletas i.e., existem certas proposições, ϕ , tais que nem elas nem as suas negações, $\neg\phi$, são demonstráveis. Em particular, isto aplica-se à teoria de conjuntos, onde um dos casos mais notáveis é o *axioma da escolha*: se A é uma família de conjuntos não vazios, existe uma função f cujo domínio é A , e $f(X) \in X$, para qualquer $X \in A$. Ora, quando uma teoria T não demonstra nem uma proposição, ϕ , nem a sua negação então, $T+\phi$ e $T+\neg\phi$ são duas teorias mais fortes que T e ambas logicamente coerentes. Se tivéssemos identificado a Matemática com a teoria de conjuntos, estaríamos agora confrontados com a necessidade de considerar *duas Matemáticas globalmente inconciliáveis*. A iteração deste fenómeno introduz uma infinita variabilidade e com ela a impossibilidade de definir *Matemática* fixando uma teoria fundamental.

O QUE FAZER NA AUSÊNCIA DE UMA DEFINIÇÃO

Podemos pensar que a diversidade que mencionámos acima é algo que não interessa reter e que, apesar de tudo, em toda aquela diversidade estrutural existe um caminho essencial que deve ser destacado. Uma tal atitude constituiria uma limitação pouco interessante do âmbito da própria Matemática. Por outro

lado, mesmo quando nos interessa uma estrutura em particular (os números naturais, por exemplo) é possível considerá-los fora do seu *ambiente natural*, num mundo imaginário, e apelar a princípios que são falsos na estrutura dos números naturais, para demonstrar factos verdadeiros acerca desses mesmos números. Ou seja, estas *estruturas ideais*, digamos assim, têm um papel relevante mesmo quando nos preocupamos apenas com certas estruturas particulares (algumas abordagens recentes exploram precisamente a ideia de que para acedermos à natureza dos conjuntos, por exemplo, devemos ter em conta aquilo que, não um mas todos os universos de conjuntos permitem observar)¹⁰. Chegamos assim a este ponto com a ideia de que não estamos em condições de poder obter uma definição útil do termo *Matemática*. Como vamos então tentar responder à questão original, cuja resposta parece precisamente depender da existência de uma tal definição? A verdade é que mesmo não sendo possível uma caracterização definitiva, é ainda assim possível isolar aspectos essenciais da Matemática e do exercício da sua actividade, que nos ajudam a responder-lhe nos termos em que nos propusemos fazê-lo. Entre esses aspectos consideram-se frequentemente a *criatividade*, a *intuição*, a *abstracção*, a *imaginação*, a par do *rigor lógico* e do *pensamento formal*. Estes são inquestionavelmente aspectos essenciais associados à Matemática e à respectiva actividade. Mas não são razões *per se* para ensinar Matemática. Pelo menos não todas elas, senão vejamos: criatividade e intuição manifestam-se em todas as áreas da actividade intelectual e é altamente controverso que a Matemática constitua um palco privilegiado para as exercitar. Além disso, são aspectos cujos mecanismos são suficientemente mal compreendidos para nos impedir de saber se se podem ou não ensinar. A Matemática oferece seguramente um palco, como outros, para a sua actuação, mas é apenas isto.

A abstracção e a imaginação possuem seguramente um papel essencial e (argumentarei) um papel distintivo em Matemática. Deixarei mais considerações sobre estes aspectos para a derradeira secção.

RIGOR LÓGICO E FORMALISMO

O formalismo matemático¹¹ resulta de um entrelaçamento essencial de dois aspectos: *demonstração formal* e *linguagem formal*. Por demonstração formal entenda-se um sistema de regras que se combinam em argumentos que testemunham a correcta transmissão da verdade. De facto, não podemos depender de demonstrações informais, contaminadas por intuições de naturezas várias, ou assistidas por diagramas, ao estilo das demonstrações dos *Elementos*. Consideremos o lado esquerdo da figura 3 onde uma sucessão de curvas aproxima sucessivamente a circunferência. Se, os perímetros dessas curvas convergem para um dado valor, não será estranha a conclusão

⁹ O termo *ininito* é aqui empregue no sentido da área.

¹⁰ No denominado programa do hiper-universo.

¹¹ Não me refiro ao formalismo enquanto losoa da matemática.

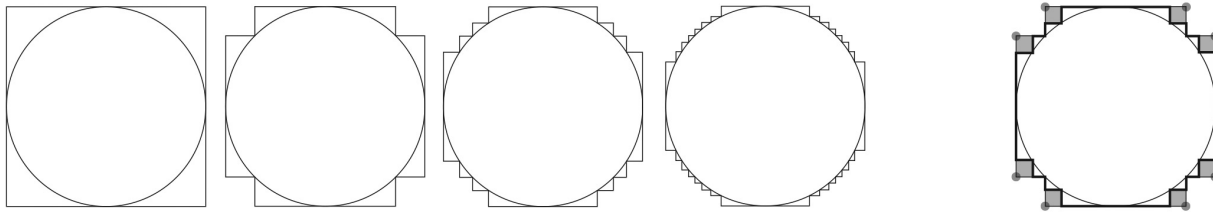


Figura 3. Aproximando a circunferência

de que esse valor coincide com o perímetro da circunferência. Considerando agora o lado direito da figura 3, podemos ver como se passa de uma curva na sucessão descrita, para a seguinte: a partir dos vértices que não estão em contacto com a circunferência desenhamos quadrados como indicado. A nova curva percorre esses quadrados usando as duas arestas que não foram usadas na curva anterior. A conclusão é inevitável, a construção das sucessivas curvas não altera o respectivo perímetro e assim *o quadrado inicial e a circunferência têm o mesmo perímetro*, uma evidente falsidade.

Por outro lado, a Matemática é acerca de domínios infinitos e, por exemplo, para estabelecer uma propriedade universal dos números naturais, não se pode fazer uma verificação exhaustiva. A alternativa é demonstrar¹². O propósito essencial da demonstração é então garantir a correcta transmissão da verdade e, por falar em verdade, é altura de referir o papel da linguagem formal. A verdade, no sentido filosófico do termo, é um valor civilizacional e a sua preservação é uma tarefa cuja importância foi desde sempre reconhecida. No entanto, quando Pôncio Pilatos perguntou a Jesus «o que é a verdade?» ele podia não estar a ser meramente retórico.

No século 4 a.C., Eubulides de Mileto colocou a famosa questão: «será que digo a verdade quando digo que minto?», aludindo ao famoso *paradoxo do mentiroso*, mais conhecido através do enunciado da proposição *eu sou falsa*. Será a frase *eu sou falsa* uma sentença *verdadeira* ou *falsa*? Breves momentos de reflexão mostrarão que é verdadeira se e só se é falsa, um evidente paradoxo!

A *verdade* não é pois uma noção simples e esse facto foi observado muito cedo. Três das epístolas pastorais que integram o Novo Testamento são atribuídas a S. Paulo. Uma delas—a epístola a Tito—descreve que Epiménides (século 6 a.C.) terá afirmado que «os cretenses são mentirosos, mentindo em todas as as ocasiões». Uma vez que o próprio Epiménides era cretense, esta afirmação ficou conhecida como *Paradoxo de Epiménides*. Convém observar que não está em causa nenhum problema

do tipo identificado no caso do paradoxo do mentiroso. A frase não pode ser verdadeira (a sua verdade implicaria a sua falsidade) e então tem que ser falsa. O facto de ser falsa já não levanta nenhum problema, pois a sua negação corresponde a afirmar que *algum cretense em alguma ocasião disse a verdade* e como esse cretense não tem que ser Epiménides, e assim não se obtém nenhuma situação paradoxal (do tipo do paradoxo do mentiroso). Mas, como muito bem notou Alonzo Church, em 1946, a situação é paradoxal por uma outra razão: um facto puramente empírico como é o de saber se alguma vez algum cretense disse ou dirá a verdade em alguma ocasião, poder ser decidido pela lógica apenas e ser independente da vontade dos próprios cretenses.

Permitam-me um último exemplo (desta vez com maior conteúdo matemático) ilustrativo das possíveis dificuldades associadas à noção de verdade: o *paradoxo de Berry*. Consideremos a expressão: *n é definível através de uma frase envolvendo menos de 200 letras*¹³, que abreviamos por $D(n)$. Mesmo considerando que os espaços são letras, o número de expressões com menos de 200 letras é certamente finito. Como os naturais são infinitos, o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} : \neg D(n)\}$ dos naturais que não satisfazem $D(n)$ é infinito, logo não vazio. Uma propriedade característica dos números naturais é que qualquer conjunto de naturais que não seja vazio possui um elemento mínimo¹⁴. Podemos assim considerar $n_0 = \min X$, o mínimo elemento de X . Tem-se então que n_0 é o menor número natural que não é definível com menos de 200 letras. No entanto, a expressão *n é o menor natural que não é definível através de uma expressão envolvendo menos de 200 letras*, define n_0 com menos de 200 letras (absurdo!).

O problema foi identificado residindo no facto de numa linguagem natural co-habitarem diferentes níveis linguísticos (desde logo a linguagem e a metalinguagem). Para evitar este tipo de dificuldade, a linguagem da matemática é uma linguagem formal (isto não significa que os matemáticos comuniquem formalmente, significa apenas que aquilo que é o objecto comunicado deve ser *formalizável*).

Como consequência, a *verdade* em matemática é objectiva, já que em última análise a sua verificação se reduz à verificação de relações básicas, do tipo $x \in A$ ou $x \notin A$.

¹² Nocas da lógica proposicional, por exemplo, podemos encontrar as tautologias de duas formas, ou através de tabelas de verdade (o que todos fazem) ou fazendo demonstrações (o que poucos sabem ser possível). O sucesso das tabelas de verdade resulta de ser um procedimento mecânico, enquanto que uma demonstração é sempre um acto criativo e muito mais difícil de obter. Mas este expediente deixa de estar disponível quando abandonamos a lógica proposicional e a nossa lógica é acerca de indivíduos em certas estruturas. Aí só nos resta demonstrar.

¹³ Dizemos que um natural n_0 é definível através de uma propriedade $P(n)$ se s_0 é o único natural que satisfaz $P(n)$, i.e. $\{n \in \mathbb{N} : P(n)\} = \{n_0\}$.

¹⁴ Um facto que justifica o bem conhecido princípio de indução.

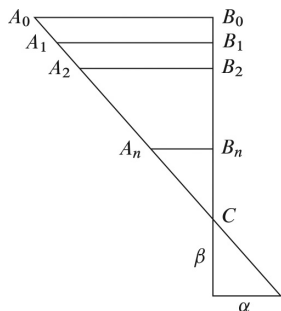


Figura 4. Evidência para a existência de infinitesimais

AINDA ACERCA DO RIGOR

É errado pensar que os avanços matemáticos se processaram constantemente alicerçados em rigor absoluto. A análise histórica revela com estrondo que os grandes saltos conceptuais e os períodos de grande criatividade corresponderam a períodos de alguma liberdade criativa. Foi assim com a teoria de conjuntos de Cantor e foi também desta forma com os progressos no cálculo com origem em Leibniz e Newton, envolvendo a noção de infinitesimal.

O que são então os *infinitesimais*? Eles são um novo tipo de números que co-existem com os números ordinários. Que tais números existam, resulta de uma característica da Matemática onde é comum a adopção de uma *ontologia elástica*.

Se considerarmos a figura 4, constatamos que

$$\frac{A_0B_0}{B_0C} = \frac{A_1B_1}{B_1C} = \dots = \frac{A_nB_n}{B_nC} = \dots = \frac{0}{0} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ou seja, a figura sugere que este tipo de comportamento pode ser representado por um novo tipo de números, que podem ser nulos do ponto de vista dos números ordinários, mas ainda assim mantendo uma razão entre si. Estes novos números são os *infinitesimais* e (na notação de Leibniz) denotam-se por dx , dy , dz , etc. Tem-se assim que se x é um número ordinário, então $x + dz = x$. Por outro lado, dado $\alpha \neq 0$ é suposto existirem infinitesimais dx e dy tais que $dx/dy = \alpha$.

Muito antes da noção de limite estar disponível, o cálculo foi desenvolvido num ambiente de suspeição relativamente à coerência destas entidades. Os grandes matemáticos que as utilizaram obtendo resultados fundamentais não se abalaram com tais objecções. Até mesmo Cauchy a quem se atribui a correcta definição de noções como a de limite, no seu famoso *Cours d'Analyse*, ao mesmo tempo que introduz as noções fundamentais ao desenvolvimento *rigoroso* do cálculo, mantém explicações baseadas nos infinitesimais não abdicando, pelo menos, do valor heurístico desta noção.

Mas, o expoente máximo de liberdade criativa na utilização de infinitesimais, reside muito provavelmente na forma como Euler estabelece o desenvolvimento em série da função exponencial (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748). Modernamente essa série é obtida a partir do teorema de Taylor e é:

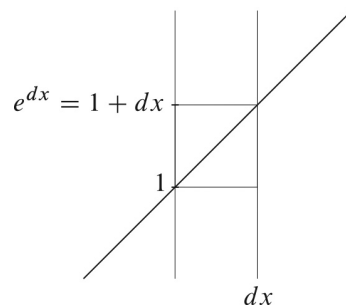


Figura 5. A função e^x numa vizinhança infinitesimal de $x=0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

Mas Euler conseguiu estabelecer esta mesma fórmula usando como única informação o facto de a exponencial tomar o valor 1 em $x = 0$ e ter derivada 1 em $x = 0$. De acordo com a concepção da época, numa vizinhança infinitesimal de qualquer ponto, qualquer curva coincide com a sua tangente (não apenas no ponto, mas em todos os pontos dessa vizinhança). Ou seja, localmente qualquer curva é uma recta (a sua tangente). Assim sendo, a figura 5 representa a função exponencial numa vizinhança infinitesimal de $x = 0$ (observe-se que a tangente tem declive unitário).

De acordo com a figura, $e^{dx} = 1 + dx$. Mas, evidentemente, o objectivo é determinar e^x para um qualquer número (ordinário) x . O segmento determinado por x pode dividir-se num qualquer número n de partes iguais. Mas, para reduzir a questão ao caso infinitesimal, Euler admite que o mesmo é possível considerando N infinito, i.e. dividindo o segmento de comprimento x num número infinito de partes. Cada uma dessas partes tem então comprimento infinitesimal $dx = x/N$. Tem-se então

$$e^x = e^{dx} = (e^{dx})^N = (1 + dx)^N = (1 + \frac{x}{N})^N.$$

Quem já imaginou naturais infinitos, pode agora admitir aplicar a fórmula do binómio de Newton a este caso, obtendo:

$$1 + x + \frac{N(N-1)x^2}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)x^3}{N^3} + \dots \quad (2)$$

considerando que os coeficientes binomiais se calculam como no caso finito i.e.,

$$\binom{N}{p} = \frac{N!}{(N-p)!p!} = \frac{N(N-1)\dots(N-p+1)}{p!}.$$

Simplificando (2), obtém-se:

$$1 + x + \frac{(N-1)}{N} \frac{x^2}{2!} + \frac{(N-1)(N-2)}{N} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

O cálculo destes coeficientes simplifica-se, pois para cada natural k finito tem-se:

$$\frac{N-k}{N} = 1 - \frac{k}{N} = 1 + dz = 1. \text{ conduzindo à fórmula (1).}$$

Este é seguramente um dos expoentes máximos desta liberdade criativa que esteve patente na utilização dos infinitesimais e que acabaria por determinar um salto conceptual da máxima importância. E o que dizer de Cantor, capaz de deixar de lado um princípio aristotélico que antes dele ninguém ousou contestar—*o todo é maior que a parte*. Dessa ousadia resultaria que, finalmente, uma noção que se considerava intratável—a noção de infinito—se tornou uma noção matemática firme. O rigor demonstrativo, formal, é uma característica matemática (e a produção de uma demonstração é um acto criativo), mas neste aspecto não se esgota seguramente a criatividade matemática e esse caminho *paralelo* ao rigor não lhe é antagónico. Pelo contrário, é uma peça fundamental do crescimento da própria disciplina.

É ENTÃO? VALE A PENA ENSINAR MATEMÁTICA?

Em 1547, Alessandro Piccolomini publicou o seu *Commentarium de certitudinem mathematicarum disciplinarum*, onde defendia a tese segundo a qual as demonstrações matemáticas não eram *potissimae*, a forma mais perfeita de demonstração. Acrescentava que o absoluto grau de certeza das proposições matemáticas não provinha das suas demonstrações, mas da objectividade das suas noções¹⁵.

Claro que não me ocorre mencionar este facto para entrar tardiamente nesta polémica, mas sim porque Piccolomini introduz uma distinção muito particular entre a Ciência e a Matemática, uma distinção que do meu ponto de vista aponta as razões intrínsecas que procuramos e justificam o ensino da Matemática. Não querendo entrar em aspectos técnicos desnecessários, vale a pena explicar melhor o que estava em causa. Numa relação causal (que necessariamente ocorre entre entidades no universo físico) nem todos os aspectos que caracterizam a complexidade dos objectos envolvidos condicionam a relação. As demonstrações *potissimae* possuíam então o duplo papel de estabelecer quais os aspectos envolvidos na relação e, de estabelecer que, de facto, esses aspectos implicavam necessariamente a relação.

No caso da Matemática, o acesso à natureza dos objectos é imediata e a primeira característica das demonstrações *potissimae* é dispensável. Este aspecto decorre precisamente do carácter abstrato dos objectos matemáticos e das estruturas matemáticas. A abstracção é uma característica fundamental da Matemática que, através dela, acede às estruturas na sua forma mais geral, mais simples e mais objectiva. Desta forma, o *universo matemático* é o mais rico, pois é nele que existem, de forma individualizada, os componentes fundamentais das concepções mais sofisticadas e das ideias mais complexas. Observe-se que a existência destas componentes, embora governada por uma

ontologia muito flexível (talvez a mais flexível de todas) é, ainda assim, governada por uma restrição essencial—a coerência lógica.

Lidando com entidades abstractas, a actividade matemática é indissociável da imaginação. Bertrand Russell referia que essa actividade depende essencialmente da capacidade de imaginar as *estruturas representativas* e observar as leis que nelas são válidas. O que está em causa é uma forma muito poderosa de imaginação, que toma como ponto de partida realidades que existem num sentido muito diferente do concreto e observável. Por outro lado, não se trata de imaginar simplesmente objectos mas, em muitos casos, imaginar esses mesmos objectos organizados de múltiplas formas.

O universo Matemático é o lugar onde a criatividade e imaginação *racionalmente coerentes* podem ser potenciadas de forma maximal. Ideias e concepções sofisticadas podem ser testadas neste ambiente, não só no que respeita à sua coerência, mas também no que respeita às suas consequências. É o lugar onde uma variedade infinita de *universos* se pode materializar e as suas propriedades podem ser observadas e exploradas.

Santo Agostinho (354–430) possuía uma interpretação curiosa dos *milagres*. Defendia precisamente que «os milagres não se opõem à Natureza, tão somente se opõem à forma como entendemos a Natureza.» Uma vez que ele estava evidentemente convencido da autenticidade de certos milagres, admitia implicitamente que a nossa percepção da realidade pode ser permanentemente desafiada.

Mesmo não aderindo à tese da existência de milagres, é possível notar interessantes pontos de contacto entre esta concepção e a observação de Poincaré segundo a qual, mesmo relativamente a um modelo bem sucedido na descrição da realidade, não podemos saber quão *próximo* esse modelo está da estrutura da própria realidade. O impacto de tudo isto é que a nossa capacidade de descrever a realidade não pode depender apenas de aspectos de natureza observacional e que o conhecimento de modelos *ideais* tem um papel decisivo e incontornável. Ora, o desenvolvimento desses modelos só pode ser feito no universo matemático, daí a importância e o papel ímpar da Matemática. Só neste contexto, as ideias por mais complexas que sejam podem ser testadas ao extremo, do ponto de vista da sua coerência.

Por exemplo, o que pensar da possibilidade de, dada uma esfera a decompor em três partes e, usando apenas rotações e translações, reorganizar esses pontos em duas esferas com o mesmo volume da esfera inicial (uma versão abstracta do *milagre da multiplicação dos pães*). Ou da possibilidade da criação *ex nihilo*. Até ao século 20, tais possibilidades seriam inconcebíveis a não ser enquanto experiências transcendentais. Mas a matemática mais recente, mostra que a primeira situação é concebível e logicamente coerente (é um resultado matemático

¹⁵Esta publicação acabaria por estar na génese de uma controvérsia que duraria quase dois séculos e se espalharia por toda a Europa, contando inclusivamente com a participação dos Conimbricenses.

que usa como hipótese o axioma da escolha e é conhecido por *paradoxo de Banach-Tarski*)¹⁶.

É também a matemática que permite constatar que a criação a partir do nada é um fenómeno compatível, em certas circunstâncias, com a leis da física newtoniana.

Estes, entre muitos outros possíveis exemplos, revelam que a Matemática corresponde a uma muito poderosa forma de

visão, a única possibilidade de vislumbrar uma diversidade de universos coerentes que, de outra forma nos seriam inacessíveis.

Vale a pena ensinar Matemática?—Chegados a este ponto a resposta é obviamente afirmativa. Não ensinar Matemática corresponde a incrementar um tipo de *cegueira* que nos diminui na nossa tarefa de compreender o universo (este ou outros, ou *todos*) e isso seria contra os desígnios da Humanidade.

¹⁶ A designação não deve iludir-nos: não é um paradoxo no sentido lógico do termo, mas é uma situação que contraria a intuição física.

ANTÓNIO M. FERNANDES
IST-UNIVERSIDADE DE LISBOA

PUBLICAÇÕES APM



A Associação de Professores de Matemática traduziu (2017) esta publicação do NCTM (2014), tornando-o acessível em língua portuguesa a toda a comunidade lusófona, disponibilizando assim um importante contributo e apoio para quantos se têm dedicado ao ensino da Matemática e à investigação no âmbito da didática da Matemática, do currículo e da avaliação. Professores e investigadores, dirigentes educativos e decisores políticos podem aqui encontrar uma importante referência para a sua ação política e educativa.

Tarefas para a aprendizagem dos números no 1.º CEB

