

O voo dos condores — 1 bando, 2 bandos e os seguintes ...

ELISABETE GONÇALVES DOS SANTOS
CRISTINA LOUREIRO

Quantas vezes perdemos oportunidades de aceder às ideias dos alunos e de desenvolver essas ideias? Esta é uma das preocupações apontada por Mason (2010) quando afirma que muitas vezes os professores perdem oportunidades de responder matematicamente e de maneira sensível a ideias dos alunos porque procuram aplicar sequências didáticas previamente organizadas e estruturadas.

É com este apontamento prévio que apresentamos este texto em que procuramos dar conta de uma breve experiência, realizada a partir de uma atividade isolada que originou depois uma sequência didática orientada pela avaliação que foi sendo feita das resoluções dos alunos. A sequência didática foi aplicada e trabalhada no âmbito de uma ação de formação contínua. Neste texto apresentamos e discutimos as tarefas propostas, as resoluções dos alunos e os contributos desta experiência para o desenvolvimento profissional da professora envolvida. O texto é da responsabilidade da professora que experimentou as tarefas e de uma das formadoras da ação. Decidimos, por isso, intercalar o uso da primeira pessoa do plural e do singular, o que deriva dos diferentes papéis que assumimos. Apresentamos assim um diálogo que de certa forma traduz a relação que procurámos estabelecer entre as sessões de formação e as experiências realizadas pelas professoras participantes na formação.

Este texto surge também na continuidade do artigo “Avaliar para as aprendizagens — um caminho que se faz avaliando” publicado na revista *Educação e Matemática*, n.º 147.

A PRIMEIRA TAREFA

No decorrer da Ação de Formação “Avaliar para diferenciar no ensino do Português e da Matemática”, em trabalho de grupo, propusemo-nos colocar problemas aos alunos partindo da exploração da história “A Princesa Baixinha”, de Beatrice Masini. De entre os problemas propostos, inspirados no contexto da história, a organização dos bandos dos condores tornou-se numa atividade bastante entusiasmante para a turma do segundo ano.

O problema foi pensado por quatro professoras da mesma escola para os quatro anos de escolaridade. A nossa intenção era experimentar uma situação suficientemente aberta que pudesse ser usada em qualquer ano de escolaridade do 1.º ciclo

e, simultaneamente, que permitisse aos alunos mostrarem como pensavam. Nunca tínhamos experimentado uma situação tão aberta.

A situação problema inicial apresentada aos alunos propunha-lhes: “Como se organizariam os condores para formarem um triângulo? Quantos condores estariam no desenho e quantas filas seriam?”

Antes de colocar o problema aos meus alunos, prevendo alguma dificuldade na sua resolução, preparei algum material (bolas e tampas), que poderia servir de apoio ao registo escrito. No entanto, essa utilização não se veio a verificar.

Os alunos leram o texto do problema e não foi dada nenhuma explicação. A maioria dos alunos iniciou a resolução do problema sem fazer qualquer questão. O Simão perguntou “Quantos condores são?”. Respondi que teria de experimentar com números diferentes de condores.

Após algum tempo, em que alguns alunos falaram entre si, observei algumas resoluções em que os alunos associam um triângulo a um número sem qualquer espécie de ligação (figura 1).

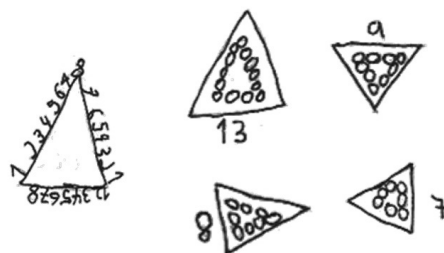


Figura 1

A maioria dos alunos apresentou resoluções semelhantes aos exemplos anteriores, desenhando o triângulo e incluindo no seu interior ou na fronteira a representação dos condores. Num dos casos, o aluno representou 36 condores de maneiras diferentes variando a forma do triângulo.

O Gabriel, para além da forma triangular, registou linhas, formando outro triângulo interior e continuou a representação dos bandos até aos 36 condores (figura 2).

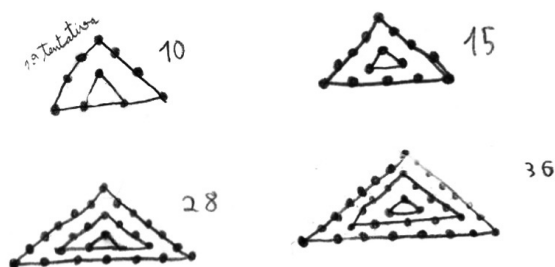


Figura 2

O David apresentou uma representação diferente das anteriores, pressupondo já uma organização na disposição dos condores em triângulo, incluindo o seu interior (figura 3).

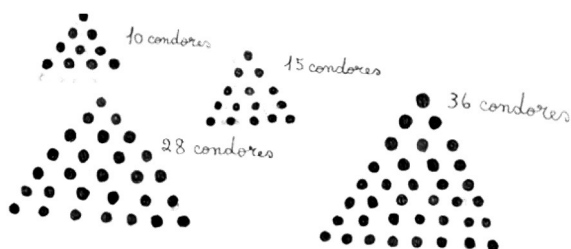


Figura 3

Com o entusiasmo, criou-se uma disputa entre os alunos que procuravam criar o maior bando de condores.

As resoluções foram analisadas numa sessão de formação e foi planeado dinamizar um momento de partilha, introduzindo algumas sugestões matemáticas a partir das configurações que pressupunham a disposição representativa dos números triangulares. Um dos objetivos era iniciar o trabalho sobre sequências numéricas e utilizar tabelas para o estabelecimento de relações numéricas e para a identificação de regularidades.

PARTILHA DAS RESOLUÇÕES

Uma tarefa pode ser aberta nas respostas e soluções que admite ou ser aberta no modo de resolução, ou em ambas as dimensões. Neste caso a tarefa inicial era aberta tanto nas soluções como na resolução. Estávamos assim perante uma situação complexa do ponto de vista da organização da partilha dos trabalhos dos alunos. Tinham o mesmo valor todas as resoluções? O que devia ser valorizado? Deviam ser todas apresentadas? Ou devia haver uma seleção? Como organizar as apresentações? Qual a intervenção do professor nessas apresentações?

Este momento de partilha foi assim preparado com base na decisão de que não seriam apresentadas todas as resoluções e que seria destacada a resolução do David porque tinha subjacente os números triangulares.

O entusiasmo dos alunos com esta tarefa era o motor desta continuidade em que se pretendia que cada um continuasse a trabalhar a partir dos bandos que tinha desenhado na primeira parte da tarefa. Iniciou-se este momento coletivo com a

apresentação à turma da resolução do Gabriel. Ele explicou que fez daquela maneira, *porque se lembrou do voo dos pássaros e que colocou o chefe dos condores no meio para manter a ordem no grupo.*

O David registou no quadro a sua resolução. Na representação feita por ele foram acrescentadas linhas aos bandos apresentados (figura 4). Após o acrescento deste elemento visual os alunos retomaram a tarefa passando a ter em conta esse aspeto que veio ajudar cada um a melhorar as suas representações.

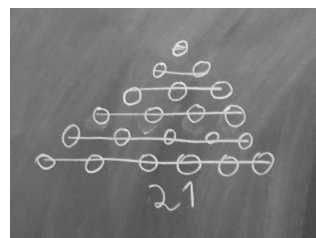


Figura 4

O Duarte tinha feito uma resolução (figura 5), mas depois de visualizar a resolução do David, apresentou outra maneira a que chamamos segunda resolução (figura 6).

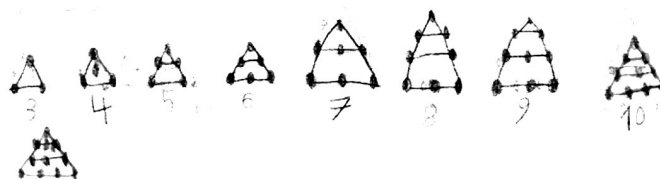


Figura 5

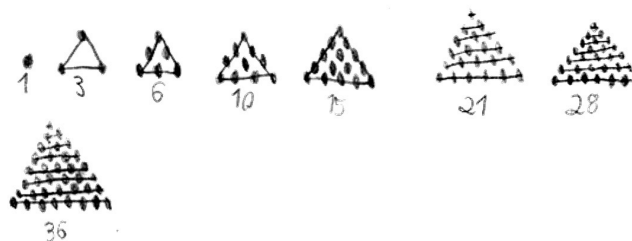


Figura 6

Tal como o Duarte, outros alunos apresentaram as suas resoluções para organizar os bandos dos condores e evoluíram realizando uma nova resolução inspirada na resolução do David. Na conclusão desta atividade, foi sugerido aos alunos a elaboração de uma tabela com os dados dos números de condores, pois pretendia-se explorar mais a utilização da tabela como organizador gráfico que potencia a análise da informação que a compõe e o estabelecimento de relações entre vários elementos que a constituem (figura 7).

A tabela foi feita coletivamente, discutindo-se os nomes dos elementos da tabela e os dados a incluir. Os alunos acharam curiosa a progressão do número de condores por bando ser +1, +2, +3, +4, ... e este aspeto influenciou as representações futuras.

figura	nº de condores	a mais?
1	1	+1
2	3	+2
3	6	+3
4	10	+4
5	15	+5
6	21	+6
7	28	+7
8	36	+8
9	45	+9
10	55	+10

Figura 7

A CONTINUIDADE DA PRIMEIRA TAREFA

Como esta experiência foi sendo partilhada nas sessões de formação, em conjunto foram também construídas novas tarefas que poderiam dar continuidade ao trabalho iniciado.

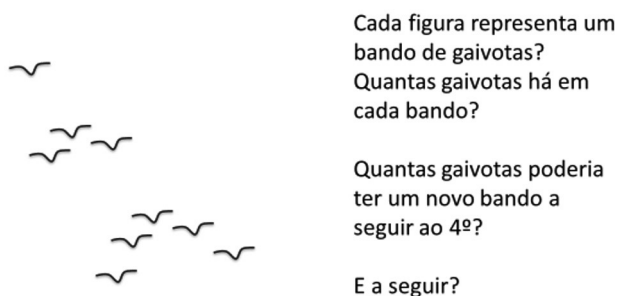


Figura 8

Dado o entusiasmo dos alunos com o bando dos condores, propôs-se um outro tipo de bando: o bando das gaivotas, com a representação na figura 8. Discutiu-se a relação entre as figuras da imagem dada até ao terceiro bando, destacando o número de gaivotas em cada bando e a diferença de bando para bando. Os alunos referiram que a representação do voo das gaivotas era um V ao contrário. Questionaram o tipo de registo que iriam fazer, se podia ser com bolinhas ou em V, o que foi deixado à sua escolha. As resoluções dos alunos foram obtidas associando sequências numéricas à sequência de figuras (figura 9).

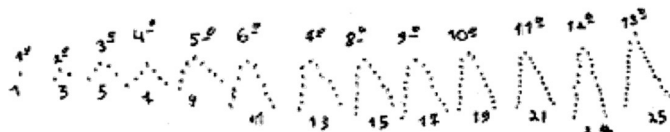


Figura 9

O Rui apresentou a sua proposta do bando das gaivotas e também realizou um organizador gráfico, neste caso uma tabela, com os elementos dos seus bandos, o número de gaivotas e a diferença entre o número de gaivotas de cada bando (figura 10).

Bando	nº de gaivotas	diferença no nº de gaivotas
1	3	
2	5	+2
3	7	+2
4	9	+2
5	11	+2
6	13	+2
7	15	+2
8	17	+2

Figura 10

MAIS UMA TAREFA

O entusiasmo dos alunos, a diversidade de soluções obtidas por eles e a consequente diversidade de relações numéricas subjacentes criaram condições favoráveis ao desenvolvimento da sequência didática. De evidenciar que os alunos passaram a criar os seus bandos estabelecendo relações entre eles. Este aspeto foi reforçado na proposta que foi feita. A proposta foi: "Inventa o teu bando. Cada novo bando deve estar relacionado com o anterior".

Os alunos registaram os seus bandos de diversas maneiras, que apresentaram coletivamente ao grupo-turma. Alguns conseguiram explicar o seguimento de um bando para outro, outros focaram-se na organização visual do seu bando. A Rita explicou que acrescentou mais 3 mochos em cada fila (figura 11), o Gabriel explicou que formou quadrados e retângulos e aumentou o número de aves dos lados das figuras (figura 12) e o David formou quadrados e retângulos e acrescentou mais 1 ou 2 nos lados das figuras (figura 13). Outros alunos repetiram organizações que já tinham sido apresentadas, sendo que a mais comum foi a dos números ímpares em V.

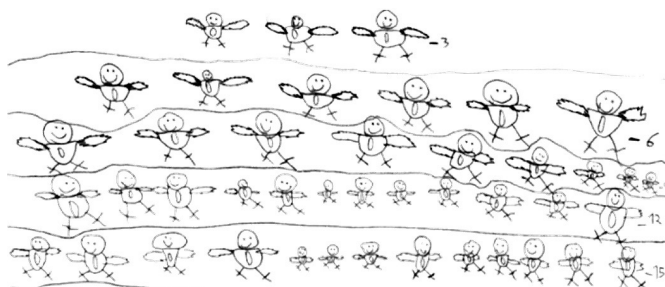


Figura 11

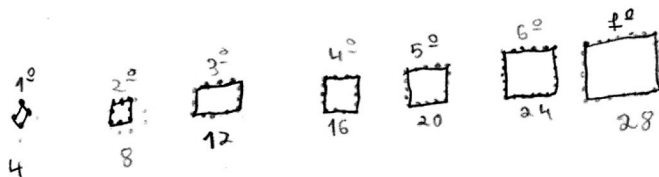


Figura 12

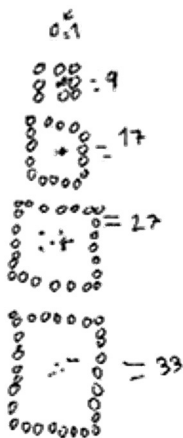


Figura 13

É interessante notar que a sequência da Rita segue uma regularidade numérica mas o desenho da disposição dos pássaros não ilustra a relação numérica. No caso do Gabriel, a sequência numérica também é clara, porém, embora o aluno a tenha associado a quadrados e retângulos, estas figuras não ilustram as disposições retangulares favoráveis à representação dos múltiplos de 4. O David teve a preocupação de associar o número de pássaros a cada uma das disposições, mas não é perceptível a regra de formação da sequência numérica. Estes três casos apontam claramente para o interesse de trabalhar com estes alunos a ligação entre uma sequência de representações visuais e uma sequência numérica.

OS MODELOS MATEMÁTICOS

Quase todas as situações de bandos criadas pelos alunos têm inerente um modelo algébrico de generalização acessível e que apresentamos na tabela da figura 14.

Situação	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	...	n	Observações
Bandos de condores, situação inicial Fig. 7	1	3	6	10	15	...	$n(n+1)/2$	Números triangulares
Bandos de gaivotas Fig. 10	1	3	5	7	9	...	$2n-1$ ou $2n+1$	Números ímpares
Bandos de mochos Fig. 11	3	6	9	12	15	...	$3n$	Múltiplos de 3
"Bandos do Gabriel" Fig. 12	4	8	12	16	20	...	$4n$	Múltiplos de 4
"Bandos do David" Fig. 13	1	9	17	27	33	...	?	Sequência não generalizável

Figura 14

Consideramos que a sequência da figura 13 não é generalizável com a informação de que dispomos. Um diálogo com o aluno ajudaria a compreender se havia alguma regularidade entre os vários elementos da composição e se esta poderia ser generalizável. Em alguns dos outros casos, os próprios alunos formularam uma relação que poderia conduzir à obtenção de uma expressão geral. É o caso dos bandos de mochos em que a própria aluna, a Rita, explicou que acrescentou sempre mais 3. Nesta experiência, a generalização não era um objetivo de aprendizagem e, por isso, não foi planeada uma estratégia para construir a expressão geradora de cada grupo de bandos a partir das ideias dos alunos. Seguramente que seria indispensável o recurso à visualização do modelo representativo dos bandos do mesmo tipo de pássaros. Em alguns casos seria mesmo necessário alterar a representação elaborada pelo aluno para uma representação mais favorável e realmente demonstrativa da expressão geral. O exemplo mais flagrante é o dos bandos de mochos em que seria desejável uma representação retangular. Fica em aberto o desenvolvimento desta sequência de atividades para chegar à generalização. Contudo, queremos evidenciar o facto de cada grupo de bandos criado por um aluno constituir uma sequência numérica que poderá ser associada a uma fórmula geradora. Constituem situações mais ricas e acessíveis porque têm significado para o aluno que a criou, imaginou e é capaz de descrever estabelecendo relações ou explicando a sua lei de formação. O caso da situação que não é generalizável pode ser usado como contraexemplo de uma sequência numérica para a qual não existe uma expressão geral associada.

REFLEXÃO

No desenvolvimento desta atividade ficou patente a motivação e o entusiasmo dos alunos na procura de estratégias para responderem ao problema. Dialogaram entre si, a pares, em pequeno grupo ou no coletivo. Sentiram-se desafiados pelas propostas e demonstraram flexibilidade no encontro de respostas, integrando as informações e descobertas dos colegas. Enquanto docente titular de turma surpreendeu-me a facilidade com que procuraram resoluções e fizeram as propostas dos seus bandos, integrando as noções adquiridas, das formas geométricas e da progressão regular entre cada bando, em simultâneo com aspetos criativos, que também estão presentes nas tarefas de Matemática. Uma sequência didática construída deste modo nunca está terminada, como ficou evidenciado com as oportunidades de generalização. Naturalmente que haveria novas tarefas a propor para o desenvolvimento do trabalho realizado e, por isso, podemos afirmar que uma sequência não se fecha e vai sempre abrindo novas possibilidades. No entanto, demos por finalizada agora esta breve experiência. Sintetizamos a experiência no quadro da figura 15.

1.ª tarefa	Criação de condições para aceder às ideias dos alunos sobre representações visuais de números. Valorização das resoluções de todos os alunos.
Momento de partilha da 1.ª tarefa	Destaque de algumas resoluções. Introdução de elementos gráficos nas representações triangulares. Valorização dos elementos gráficos no destaque visual de relações entre os elementos de uma representação.
Desenvolvimento da 1.ª tarefa	Utilização da tabela como organizador gráfico que potencia a análise da informação que a compõe e o estabelecimento de relações entre vários elementos que a constituem.
2.ª tarefa	Utilização de tabelas na representação de relações numéricas construídas a partir de representações visuais. Valorização das ideias dos alunos.
3.ª tarefa	Relações numéricas em sequências numéricas. Comunicação das relações recorrendo a representações visuais e à comunicação verbal.

Figura 15

Para fechar a apresentação desta experiência fazemos algumas reflexões que contemplam os aspetos que foram mais significativos.

Na perspetiva do ensino exploratório, foi muito importante a primeira tarefa ter sido muito aberta. Esta abertura permitiu que todos os alunos se envolvessem na atividade e que o professor recolhesse informação para decidir como continuar.

A manutenção da abertura das tarefas deu a possibilidade aos alunos de criarem as suas próprias soluções e assim ficarem mais sensíveis à diversidade de soluções e à importância de descreverem a sua solução.

A resolução de novas tarefas em continuidade permitiu melhorar os esquemas de resolução, acrescentando elementos gráficos orientadores aos triângulos representativos, as linhas, e introduzir a tabela como organizador gráfico útil para o estabelecimento de relações numéricas.

Nesta experiência ficou evidente a capacidade exploratória dos alunos, na sua descoberta para solucionar o problema. Valorizou-se mais a criatividade e partilha de ideias entre os alunos, ficando a faltar a generalização, que permitiria a aplicação das resoluções em outras situações.

Na perspetiva da avaliação, foi evidente que os próprios alunos melhoraram as suas resoluções ou representações tendo em conta as resoluções partilhadas. Também ficou claro que a ação avaliativa do professor foi orientada para o grupo turma, considerando cada aluno como um elemento importante no grupo e que tem contributos a dar para a aprendizagem dos seus colegas. O professor selecionou as resoluções para discussão a partir dos contributos que essa solução poderia dar aos colegas. Ao destacar resoluções mais ricas e matematicamente mais poderosas, o professor não precisou de dar *feedback* a cada aluno separadamente. Foram os próprios alunos que valorizaram esses

aspetos destacados e que se apropriaram deles para melhorarem as suas resoluções nas tarefas de continuidade.

Como professora, em diversos momentos questiono a aprendizagem que os alunos fazem das noções matemáticas, pretendendo que eles apresentem progressos no raciocínio e maior rapidez de cálculo. Mas, para que tudo isso aconteça é fundamental a sua motivação e envolvimento nos problemas. Assim, o professor tem mais facilidade de avaliar as capacidades dos alunos e de apreciar a evolução do seu desempenho.

Na apresentação inicial do problema dos “bandos” aos alunos, nunca imaginei que viria a ser tão estimulante e com o alcance que veio a ter. Inicialmente parecia-me “demasiado aberto”, com várias possibilidades de resposta, considerando até que poderia “confundir” os alunos. Pelo contrário, rapidamente conseguiram atribuir alguma organização e encontrar uma sequência lógica nas propostas de bandos.

Com o desenvolvimento das tarefas mencionadas, fiquei com um maior reconhecimento das potencialidades de situações problemáticas “abertas”, que desencadeiam a autonomia dos alunos, a interajuda e aumentam o seu interesse pelas questões matemáticas. Pareceu-me fundamental a oportunidade que os alunos tiveram de exercitar as suas capacidades.

Como formadora esta experiência foi muito significativa. De certa forma houve um isomorfismo entre a ação do formador e a ação das professoras em formação. Num primeiro momento foi preciso incentivar as professoras a arriscar uma proposta muito aberta, situação totalmente nova para elas, e acreditar que seria possível ter resultados que dessem pistas para continuar. Num segundo momento, bastou evidenciar o valor matemático das resoluções de alguns alunos e planear em conjunto algumas possibilidades de continuidade. O entusiasmo dos alunos é sempre contagiante para os professores.

Esta sequência didática foi sendo construída com a professora partir da análise das resoluções dos alunos. E embora a sequência já tenha alguma consistência consideramos que não está terminada e há aspetos ainda por desenvolver. Nunca pensámos que este voo nos levasse tão longe e nos proporcionasse tantas ideias e vistas tão ricas.

Referências

Mason, J. (2010). Attention and intention in learning about teaching through teaching. R. Leikin & R. Zazkis (Eds.) *Learning through teaching mathematics* (pp. 23–47). Springer.

Elisabete Gonçalves dos Santos

E.B.1 Luz/Carnide – Agrupamento de Escolas Vergílio Ferreira

Cristina Loureiro

ESE do IP de Lisboa