

Valorizar o raciocínio espacial no ensino e na aprendizagem da geometria (e não só)

LINA BRUNHEIRA

Imagine a seguinte situação, talvez até já a tenha vivido. Quer comprar uma secretária simples, com gavetas, e decide que lhe bastará um modelo barato, vendido empacotado e ainda por montar. Afinal, o que poderá correr mal? Chega a casa e põe mãos ao trabalho. Até lhe apetece ignorar as instruções de montagem, mas sabe que é provável que esta seja uma má opção. Decide então analisá-las. Tem uma sequência de etapas que começa com a identificação das diferentes partes do móvel, peças auxiliares, como parafusos e porcas e, ainda, as ferramentas a usar. Neste momento, tem de fazer corresponder cada peça à sua representação, o que pode não ser assim tão óbvio – afinal o esquema de montagem é uma representação no plano de um objeto 3D, uma relação que acarreta alguma ambiguidade. Na próxima etapa, esta interpretação do esquema inclui ainda compreender em que posição tem de colocar as peças. Será que o fundo da gaveta tem posição própria ou pode ser voltado? E a frente da gaveta? Geometricamente falando, têm simetria de reflexão ou de rotação? Avança para a ligação das peças. Agora as instruções têm uns “balões” que parecem ser ampliações de um detalhe, para perceber melhor como deve colocar os parafusos e rodá-los. Não é que tenha feito um curso em *bricolage*, mas sabe que para tratar os objetos tridimensionais através da sua representação no plano cada área usa as suas próprias convenções, e esta é bastante intuitiva.

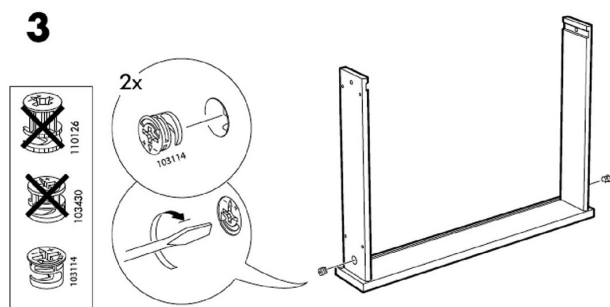


Figura 1. Detalhe das instruções de montagem de uma secretária IKEA®

O seu trabalho vai avançando e monta a secretária com sucesso. Parece firme e não sobram peças. Olhando retrospectivamente para este processo, que capacidades mobilizou? Possivelmente, foi necessário interpretar, perceber, localizar, mover, construir, ações que permitiram compreender e transformar. Estas são,

na verdade, algumas das componentes do raciocínio espacial que aprofundaremos adiante.

RACIOCÍNIO ESPACIAL, DE QUE FALAMOS?

O conceito de raciocínio espacial não é novo, mas é certamente um conceito que está a merecer uma nova atenção. Na tentativa de procurar uma definição, encontramos várias ligações à visualização e algumas das dificuldades que já identificávamos neste conceito, como o uso de vários termos ou expressões (entre os quais “raciocínio visual”, “pensamento espacial”, “imagens mentais”, “espaciais”, “visuais”, etc.) que pretendem significar algo parecido e que têm em comum a atividade de imaginar objetos estáticos ou dinâmicos e atuar sobre eles (por exemplo, rodar, aumentar, etc.) (Gutiérrez 1996; Sinclair et al., 2016), gerando uma “confusão” que reflete a coexistência de diferentes áreas de investigação que se dedicam ao estudo da visualização, entre elas a educação matemática e a psicologia e, neste último caso, com diferenças entre as abordagens dos psicólogos de educação e os cognitivistas.

Apesar de alguns autores encararem a visualização explicitamente como uma forma de raciocínio (Gutiérrez, 1996) ou de “fazer matemática” (Presmeg, 2006), tirando partido de processos de construção e transformação de imagens visuais e mentais, bem como de representações de natureza espacial, atualmente existe alguma literatura que distingue raciocínio espacial de visualização.

No âmbito da investigação em educação matemática, o estudo da visualização não é recente mas, como referi, o cruzamento de várias áreas nem sempre tem contribuído para a sua clarificação ou valorização. Já o conceito de raciocínio espacial é muito mais recente e, de certa forma, ainda pouco explorado. Talvez o primeiro aspeto que merece ser assinalado a seu respeito é que o conceito de raciocínio espacial apresenta-se enfatizando, na sua própria denominação, que se trata de uma forma de raciocínio. É essa a perspetiva do grupo de investigação *Spatial Reasoning Study Group*¹ (SRSg) (Davis, Okamoto & Whiteley, 2015), que sublinha que o raciocínio espacial é mais do que a

¹ O SRSg é um grupo multidisciplinar de investigadores norte-americanos na área da Educação Matemática, Matemática e Psicologia que participam num projeto de investigação sediado na Universidade de Calgary, no Canadá, dedicado ao raciocínio espacial.

perceção espacial (muitas vezes enganadora e motivo frequente de desvalorização da visualização) e que é importante manter um foco na ideia de raciocínio.

Os objetivos deste grupo de trabalho incluem avançar na compreensão da caracterização do raciocínio espacial. Trata-se de uma tarefa complexa pois, no seu entender, o raciocínio espacial não pode ser entendido apenas reduzindo-o aos seus componentes e estes não devem ser considerados isoladamente. Não obstante, o grupo elenca um conjunto de categorias, cada uma envolvendo várias componentes, que evidenciam qualidades críticas do raciocínio espacial. Estas categorias (*interpretar; (des)construir; alterar; mover; localizar; perceber*) são apresentadas num diagrama (aqui simplificado na figura 2) que as associa preferencialmente à atividade de *compreender* (que consideram ter uma natureza mais “mental”) ou de *transformar* (tendencialmente mais “física”), apesar de não estabelecer uma fronteira que as separe claramente.



Figura 2. Componentes do raciocínio espacial. Adaptado de Davis et al. (2015, p. 141)

Sem pretender analisar todas as componentes e subcomponentes, cabem aqui alguns comentários. Em primeiro lugar, assinalar que *visualizar* é uma subcomponente de *percecionar*, o que nos recorda que o raciocínio espacial não depende apenas do sentido da visão (e, assim, não será adequado torná-lo sinónimo de raciocínio visual) e que há outras formas de nos apropriarmos do espaço. De facto, além do próprio tato, também aqui reconhecido, há mobilização do raciocínio espacial que não depende de nenhum sentido, como podemos perceber nalgumas situações que envolvem orientação. Em segundo lugar, o *interpretar* é algo que sabemos estar presente na resolução de qualquer tarefa, mas que aqui surge como algo mais específico, envolvendo ideias espaciais (por exemplo, como é que interpretamos um paralelogramo oblíquângulo se for uma representação de uma figura no espaço 2D ou 3D?). Em terceiro, estas categorias não são estanques, pois é evidente que existem pontos de contacto nalguns casos (por exemplo, o *dobrar*, da categoria *alterar*, pode estar ligado ao *identificar a simetria*, da categoria *interpretar*). Finalmente, está implícita a ideia de que as ações envolvidas em cada componente não são estritamente mentais, tal como defende Gutiérrez (1996) quando fala de visualização.

A MOBILIZAÇÃO DO RACIOCÍNIO ESPACIAL – UM EXEMPLO PARA REFLETIR

O exemplo que apresento, e que tem por base a tarefa publicada na secção Materiais para a Aula de Matemática deste número da revista, parte do contexto da formação inicial de educadores de infância e professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, mais precisamente de uma Licenciatura em Educação Básica (LEB). Trata-se de um problema proposto na unidade curricular de Geometria, que integra o 2.º ano do plano de estudos. Apesar de se referir a objetos tridimensionais, este é essencialmente um problema do plano. Note-se que também aqui se aplica a noção de raciocínio espacial, já que “espacial” não é sinónimo de espaço 3D, incluindo também outros espaços, particularmente 2D. Este problema foi resolvido em grupos com o máximo de cinco elementos. Tomemos por referência uma das turmas em que surgiram 7 resoluções diferentes, correspondentes aos 7 grupos existentes. À exceção de uma resolução incompreensível, as 6 estratégias seguidas podem ser organizadas da seguinte forma:

Tabela 1. Tipos de resoluções do problema “Frascos de perfumes”

Fundamento da resolução	Operações realizadas	Correção
Com base nas relações espaciais fornecidas	Recorre à decomposição da figura e à simetria (1)	Resolução exata
	Recorre à decomposição e recomposição (1)	Resolução por aproximação
Com base em relações percecionadas	Observação (1)	Resolução sem sucesso
Com base em relações métricas	Obtenção das medidas	Resolução por aproximação com sucesso (2)
	Recurso à fórmula de volume do tronco do cone (3)	Resolução sem sucesso (1)

A primeira resolução que apresento (figura 3) diz respeito ao grupo cuja estratégia assenta, essencialmente, na perceção. Sobre o frasco do meio, argumentam que o “volume da parte de baixo é maior do que o volume da parte de cima” referindo-se aos dois troncos de cone que compõem o frasco. Efetivamente, essa afirmação é verdadeira porque os dois trapézios que os representam têm as mesmas bases, logo o que tem maior altura tem maior área. Contudo, o grupo não sustenta a sua afirmação em qualquer argumento a não ser a observação, tal como referem. Além disso, o líquido não ocupa todo o tronco “de baixo” e acaba por ocupar até menos de metade da capacidade do frasco, ao contrário do que o grupo sugere quando afirma que “o líquido está a mais de metade da figura”. Desta forma, apesar de ser o frasco 2 que não está a meio, a resolução do grupo está incorreta.

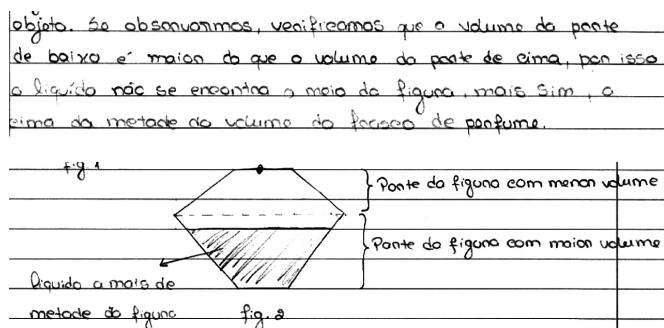
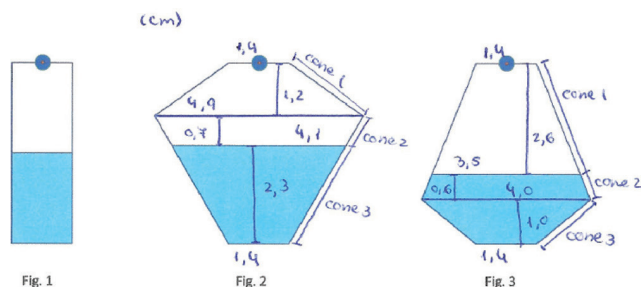


Figura 3. Excerto da resolução do problema “Frascos de perfume” com base na percepção

Ainda sobre a resolução apresentada anteriormente, e tendo em consideração a caracterização do SRS (2015), podemos afirmar que as ações que o grupo realiza se enquadram nas categorias *(des)construir* e *percecionar*, pois fazem uma decomposição da segunda figura da tarefa (frasco do meio) para, através da visualização, chegarem à resposta. Contudo, a visualização não se apoia em propriedades da figura, pelo que o grupo não é bem-sucedido.

A próxima resolução (figura 4) é de um dos grupos que efetuou medições das representações dos frascos 2 e 3 e utilizou-as para calcular o volume dos três troncos de cones representados em cada uma (um tópico não tratado na unidade curricular). Todos os cálculos estão corretos e o grupo conclui que, no frasco 2, o volume do tronco 3 é inferior à soma dos volumes dos troncos 1 e 2, logo o frasco não “está a meio”.



Assim, olhando para as figuras 2 e 3 vemos que estas podem ser divididas em secções de cones. O volume de uma secção de um cone é dado por: $V = \frac{\pi h}{3} \times (R^2 + Rr + r^2)$, em que h é a altura da secção, R é o raio da base maior e r é o raio da base menor da mesma secção. Calculando os volumes temos:

Figura 4. Excerto da resolução do problema “Frascos de perfume” usando relações métricas

Sobre esta resolução, saliento dois aspetos. Por um lado, o grupo utiliza valores que não são fornecidos no problema e são obtidos por medição, o que não é um procedimento habitualmente aceitável. Neste caso, as representações dos frascos não são meramente ilustrativas e a sua forma e dimensão contém dados. Por esse motivo, a obtenção de medições conduz-nos potencialmente a uma resposta correta (como aconteceu), muito embora seja sempre uma resposta por aproximação. Por outro

lado, salienta-se que os dois grupos que usaram esta estratégia não identificaram que uma estratégia análoga poderia ser usada de forma mais simples, calculando as áreas dos trapézios. De facto, este é um problema do espaço 3D que se reduz a um problema do espaço 2D, já que se supõe que o frasco corresponde ao sólido obtido quando a figura apresentada efetua uma rotação completa sobre o seu eixo de simetria.

Desta forma, tendo em conta as componentes de raciocínio espacial propostas pelo SRS (2015), identificamos particularmente a mobilização da componente *(des)construir*, através da decomposição em figuras para o cálculo dos volumes e da componente *interpretar*, ao relacionar as medidas das figuras 2D com os parâmetros do cálculo do volume de figuras 3D.

Na terceira resolução que apresento (figura 5), o grupo recorreu à decomposição e recomposição de figuras. Começaram por simplificar o problema, reduzindo a análise da representação do frasco 2 à análise dos dois triângulos “laterais”, já que o retângulo central do frasco é equivalente ao frasco 1, para o qual já haviam argumentado que se encontra a meio. De seguida, colocaram um triângulo congruente a C na parte vazia do frasco e decompuseram-no nos triângulos A e B que cabem, como mostra a figura, dentro dessa parte, sobrando algum espaço. Concluem assim que este frasco não se encontra a meio mas, mais uma vez, trata-se de uma resolução por aproximação.

Para ver qual dos frascos não se encontrava a meio, primeiramente o grupo decidiu repartir cada uma das figuras (figura 2 e 3) como se encontra a figura 1, ou seja, um retângulo ao alto. De seguida, dividiu-se as figuras em formas geométricas, na parte onde se encontrava o líquido e depois na outra parte, colocámos essas mesmas figuras para ver se preenchia o espaço.

Assim, na figura 2 é possível visualizar que o frasco de perfume não se encontra a meio, uma vez que, após a colocação das formas geométricas este não se encontrava totalmente preenchido.

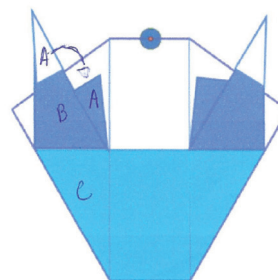


Figura 5. Excerto² da resolução do problema “Frascos de perfume” usando composição e recomposição de figuras

Desta forma, podemos considerar que esta resolução envolve raciocínio espacial relativo à categoria *(des)construir* porque assenta sobretudo na decomposição e recomposição de figuras, bem como *interpretar* quando efetuam a comparação.

Finalmente, apresentamos a única resolução exata apresentada nesta turma. O grupo faz um relato do processo vivido, incluindo as tentativas infrutíferas (figura 6). A estratégia que acabou por

² Na imagem, as letras foram introduzidas pela autora para melhor compreensão da resolução

ser seguida surge de uma experiência em que traçam segmentos ainda sem conhecer o seu proveito:

Dividimos, deste modo, o hexágono irregular em várias partes, que são, por sua vez, polígonos: Retângulos, triângulos e trapézios. No entanto, não chegámos a nenhuma conclusão e, por isso, decidimos continuar a explorar a figura, traçando segmentos de reta.

Se o frasco é composto, ainda, por uma área que corresponde aos triângulos a amarelo e como essa parte do frasco se encontra vazia, então, o frasco tem mais espaço vazio do que cheio.

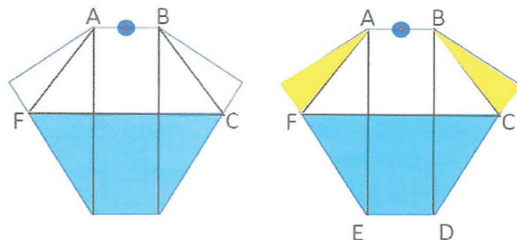


Figura 6. Excerto da resolução do problema “Frascos de perfume” recorrendo à decomposição e simetria

A resolução do grupo assenta assim na simetria do hexágono encontrado que, embora não expressem, está garantida pela igualdade da base e topo do frasco e pelo facto de o líquido estar a metade da altura. Neste caso, o raciocínio espacial é mais complexo que nos restantes: envolve *alterar*, quando incluem novos elementos na figura (os segmentos FA e CB); *percecionar*, quando visualizam o novo hexágono que surge na figura e a sua simetria; *(des)construir*, quando decompõem o frasco nas partes branca, azul e amarela³; e *interpretar*, quando comparam as áreas da parte com líquido e sem líquido, chegando assim à conclusão que o frasco tem menos de metade do perfume. Trata-se de uma resolução eficiente e eficaz, aparentemente simples, mas que envolve várias componentes do raciocínio espacial e que constitui um exemplo de como este tipo de raciocínio pode ser profícuo.

RACIOCÍNIO ESPACIAL, SÓ EM GEOMETRIA?

Todos os exemplos apresentados até aqui são do campo da geometria. No entanto, podemos questionar: Não há raciocínio espacial noutros campos da matemática? E fora da matemática? Como referem Goldenberg, Cuoco e Mark (1998), o raciocínio espacial constitui, para muitos alunos, um ponto de acesso, uma primeira oportunidade de participar na atividade matemática. Mais ainda, Whiteley et al. (2015) referem estudos que revelam uma correlação positiva entre a capacidade de raciocinar espacialmente e o desempenho em matemática, mesmo no campo dos números e, de uma maneira mais geral, nas disciplinas STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*).

De facto, são vários os conceitos de outros campos da matemática cuja compreensão pode ser aprofundada quando suportada em relações espaciais: a relação parte-todo e unidade de referência no campo dos números racionais (figura 7), a média aritmética

(figura 8) na estatística, ou os casos notáveis da multiplicação na álgebra, (figura 9) são apenas alguns exemplos.

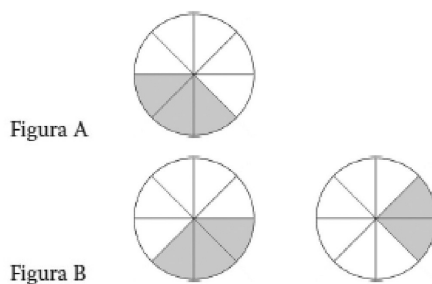


Figura 7. Figuras de suporte para a discussão da unidade de referência. Retirado de Veloso, G. (2017)

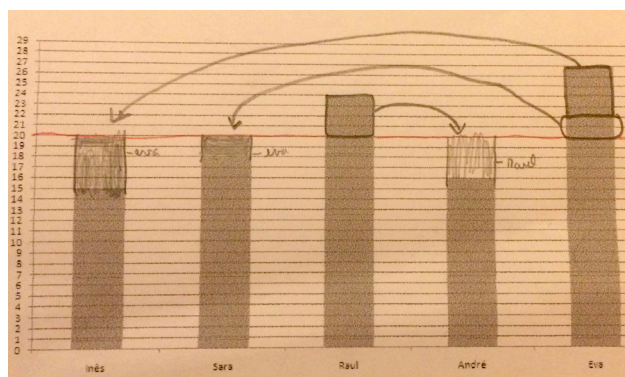


Figura 8. Representação gráfica da média como distribuição equitativa dos dados. Retirado de Gregório, M. (2014)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \hline b & a \\ \hline \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a^2 & \\ \hline \hline & \\ \hline \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & ab \\ \hline \hline ab & \\ \hline \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \hline & b^2 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 9. Representação geométrica do quadrado de um binómio

Além da matemática, são também inúmeros os exemplos de outras áreas científicas que requerem a mobilização do raciocínio espacial, de áreas artísticas com predominância para as artes visuais, e no nosso quotidiano, como vimos no início deste artigo.

CONCLUINDO...

São muitas as razões para valorizar o raciocínio espacial na matemática e noutros domínios. Os exemplos que apresentei ilustram, particularmente no caso da geometria, como o raciocínio espacial pode desempenhar um papel relevante. O SRSG (2015) vai mais longe, afirmando que é necessário “especializar o currículo”, na medida em que o desenvolvimento do raciocínio espacial potencia a compreensão de muitos conceitos e procedimentos e promove a resolução de problemas. De facto, cada vez mais estamos imersos em ambientes em que a informação está compactada na forma visual, sendo dirigida tanto a adultos como a crianças. Valorizar o raciocínio espacial significa, por um lado, tirar proveito desses ambientes e, por

³ Na versão impressa do artigo, correspondem às partes branca, cinzenta escura e cinzenta clara, respetivamente.

outro, preparar as crianças, jovens e adultos para funcionarem num mundo com muitos cenários, que incluem as representações mais convencionais, mas também o mundo virtual, com tudo o que já oferece e ainda nos há de oferecer.

Referências

- Davis, B., Okamoto, Y. & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In B. Davis & Spatial Reasoning Study Group. *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 139-150). New York, NY: Routledge.
- Frances, K. & Whiteley, W. (2015). Interactions between three dimensions and two dimensions? In B. Davis & Spatial Reasoning Study Group. *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 121-136). New York, NY: Routledge.
- Goldenberg, E. P., Cuoco, A., & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 3-44). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Gregório, M. (2014). Média: O procedimento e a compreensão. *Educação e Matemática*, 123, 31-35.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 1, 3-19.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.
- Silva, J. C. et al. (2019). *Recomendações para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática. 1º relatório*. Consultado em https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf
- Silva, I. L., Marques, L., Mata, L. & Rosa, M. (2016). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. ME/DGE. Consultado em http://www.dge.mec.pt/ocepe/sites/default/files/Orientacoes_Curriculares.pdf
- Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics education*, 48(5), 691-719.
- Veloso, G. (2017). O modelo retangular na compreensão de algoritmos operatórios com números racionais representados em fração. *Educação e Matemática*, 143, 5-9.
- Whiteley, W., Sinclair, N. & Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? In B. Davis & Spatial Reasoning Study Group. *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 3-14). New York, NY: Routledge.

LINA BRUNHEIRA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

FRASCOS DE PERFUME

As embalagens dos produtos de consumo corrente não são ingénuas. O *design*, os tamanhos e as dimensões, o nome e texto associado são aspetos fundamentais. E basta comparar embalagens antigas com embalagens recentes para ver como o *marketing* das embalagens evoluiu.

Algumas embalagens são mesmo pensadas para enganar o consumidor. Durante muito anos, usei um perfume cujo frasco era bastante enganador. Quando o líquido estava a meio da altura, já a quantidade de perfume no frasco estava a muito menos de meio. Foi esta situação que inspirou a criação deste problema a que chamei *Frascos de perfume*. Os frascos parecidos com os da figura 2 são muito usados na indústria de perfumes, pois criam a ilusão de que o perfume está a durar muito mais tempo do que realmente acontece.

Esta proposta de tarefa para a aula de matemática tem vários objetivos. Um, obviamente, é a resolução do problema. É um problema de comparação de volumes, que aponta para a observação das formas e análise das relações entre as medidas dos objetos envolvidos. Além disso, proporciona várias estratégias de resolução.

Este problema foi proposto aos alunos de Geometria da Licenciatura em Educação Básica da ESE de Lisboa. A discussão de resoluções apresentadas por esses alunos é desenvolvida pela Lina Brunheira num artigo publicado nesta revista.

Do ponto de vista da aprendizagem, este é um problema desafiante para construir um modelo dinâmico que permita simular o volume total do frasco e a variação da quantidade de líquido em função da variação das dimensões e da altura do líquido. Também é interessante fazer experiências com frascos reais. E com crianças mais pequenas as representações dinâmicas podem ser usadas para fazer discussões interessantes.

Mas há ainda um outro objetivo de natureza totalmente diferente. É o objetivo de desenvolvimento da nossa capacidade de observar o que nos rodeia e de problematizar muitas situações que vivemos no dia a dia. Afinal de contas quantas embalagens são concebidas para nos criar ilusões? Ainda uso este perfume, e até já pensei em pedir um patrocínio à empresa que o produz para realizar um projeto sobre embalagens.

CRISTINA LOUREIRO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA