Um modelo matemático

J.Francisco Furtado

Nuno Rei

"Oh s'tore!... Desculpe, mas isto que demos serve para alguma coisa, ou é só palha?!..." Esta frase, familiar a muitos professores de Matemática, não aparece por acaso. Os alunos, na sua maioria, vêem-se confrontados com muita teoria embebida em exercícios e não encontram no seu dia a dia situações onde possam aplicar esses conhecimentos.

Introdução

Compreende-se facilmente que qualquer unidade programática faz muito mais sentido se de antemão o aluno souber que vai aplicar os conhecimentos adquiridos em situações reais. É claro que nem todas as matérias têm uma aplicação directa, muitas delas servem simplesmente como fundamentação para temas posteriores, e é essencial fazer o aluno sentir isso. Um aluno não é propriamente um vaso pronto a encher de matéria a nosso belo prazer, um aluno é capaz de entender as contingências, inclusivé as programáticas, e colaborar com o professor desde que no horizonte vislumbre uma aplicação, que poderá ser imediata, dos assuntos tratados.

Assim, o ideal seria iniciar cada unidade programática com situações que envolvessem os alunos e lhes mostrassem a aplicação da matéria a estudar. Se na resolução dessa situação, individualmente ou em grupo, os alunos conseguissem construir por si próprios, ainda que de forma rudimentar, os fundamentos da teoria objectivada nesse capítulo, então a assimilação de conhecimentos iria ser muito facilitada. Não é que sejamos acérrimos defensores do ensino por descoberta, nem os vastos programas, nomeadamente ao nível complementar, se compadecem com isso, queríamos apenas deixar bem claro nesta introdução que é importante levar o aluno a tirar conclusões das quais ainda não conhece formalmente os conceitos que melhor vão dar resposta aos seus problemas.

Uma questão que se pode colocar é qual o papel do professor nesta fase de aprendizagem. É nossa convicção que nesta altura o professor deve ser o mais discreto possível, mostrando porém aos alunos que não é um mero espectador e que está em todos os momentos presente e disposto a ajudar com todo o agrado.

Modelos matemáticos

Os alunos podem e devem construir modelos matemáticos que os ajudem a atingir os objectivos propostos tendo em conta os conteúdos programáticos. Mas o que é um modelo matemático?

Vamos começar por distinguir dois conceitos, o conceito de "modelo em Matemática" e o de " modelo matemático". Enquanto que um modelo em Matemática se define sem ambiguidade a partir da noção de valor de uma fórmula do cálculo dos predicados de primeira ordem, numa realização de uma linguagem, noções que se podem explicitar na teoria formal dos conjuntos, o conceito de modelo matemático está mais ligado ao processo de modelação, isto é, o processo mediante o qual se definem estratégias de acção, numa representação abstracta de uma situação real. É este o conceito que nos interessa analisar.

Modelar uma situação real consiste essencialmente em:

- observar e pôr em evidência os elementos e as relações que pareçam essenciais;
- transformar os elementos em objectos matemáticos e as relações em relações matemáticas;
- resolver os problemas específicos da situação real usando conceitos matemáticos;
- interpretar os resultados e confrontá-los com a situação real para assim tirar as conclusões que eram nosso objectivo.

Quando a situação real é complexa, torna-se evidente que em todos os estádios da elaboração do modelo se fazem simplificações, esquematizações e aproximações. Portanto, se o modelo inicial for muito grosseiro, ou mesmo caricatural, isso não quer dizer que seja um mau modelo e que por isso deva ser abandonado. Deve simplesmente ser modificado e dirigido para os nossos objectivos ao longo das várias etapas do trabalho.

Na aula, é exactamente neste ponto, que o professor tem um papel decisivo. Quando todo o trabalho do aluno lhe parece perdido, uma pequena ajuda é suficiente para colocar de novo este jovem investigador no caminho correcto da resolução do problema.

Para ver como se constrói e optimiza um modelo matemático escolhemos uma situação concreta que desenvolvemos, com resultados que para nós se vieram a revelar espectaculares, o que prova a nudez dos programas vistos à luz dos manuais. Um professor que goste realmente da sua profissão e dos seus alunos, que tenha sólidos conhecimentos científicos, não se deve acomodar a cumprir os programas que lhe são impostos, embora isso também seja importante, pelo menos para aqueles alunos que pretendam continuar os seus estudos, enquanto o crivo por onde têm de passar para ingressar na Universidade não se alterar.

Desenvolvimento de um modelo

Escolhemos um capítulo do programa do 11º ano que, por ser dos últimos (?), normalmente não é dado: o cálculo combinatório.

A situação que nos propomos analisar como motivação para este capítulo é saber de quantas formas diferentes se consegue construir a tão conhecida "casinha" da fig.1, que todos nós sabemos que se pode desenhar sem levantar o lápis e sem passar duas vezes pelo mesmo caminho.

Foi sem dúvida ambiciosa a nossa pretenção. Não pelo facto de querer descobrir como se faz a "casinha", mas pelo facto de pretendermos saber quantas maneiras diferentes existem de a desenhar nas condições pretendidas, ou seja, sem levantar o lápis e sem passar duas

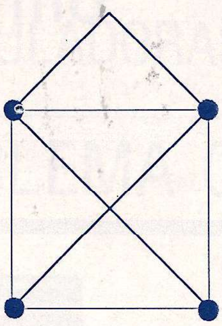


fig. 1

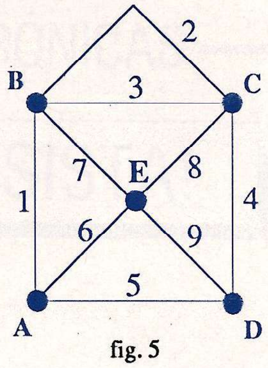


fig. 5

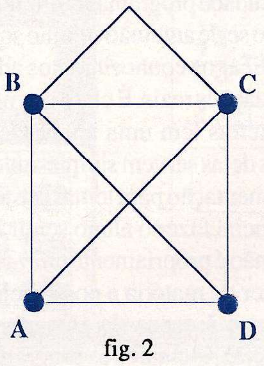


fig. 2

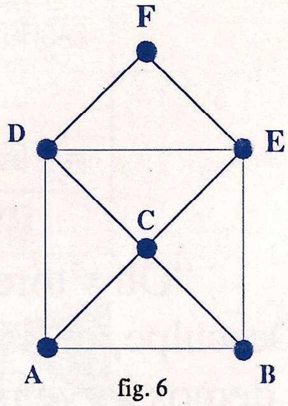


fig. 6

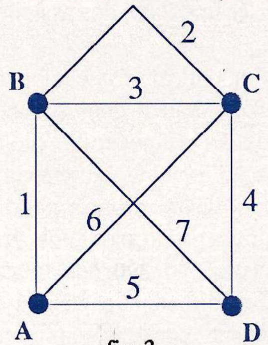


fig. 3

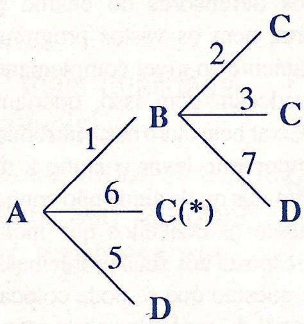


fig. 4

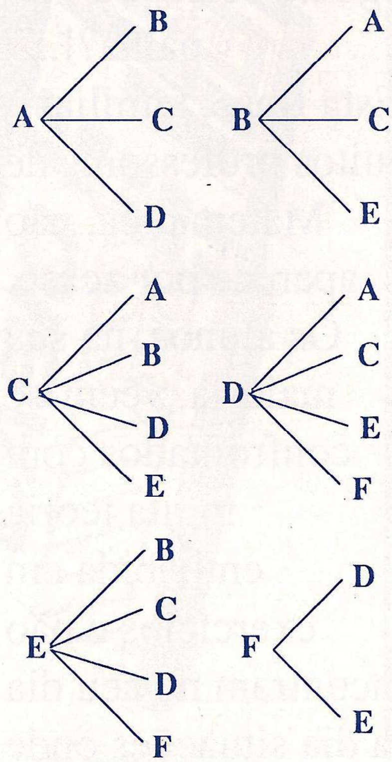


fig. 7

vezes pelo mesmo caminho.

Ao que sabemos, e ao que nos foi dado observar nos vários livros que consultámos posteriormente, ninguém se deu a este trabalho, nem nós suposemos que o problema tomasse as proporções que tomou, ao ponto de necessitarmos da ajuda de um computador e de um programa que demorou três dias a fazer. Estas são as contingências próprias de quem desenvolve um modelo, mas é o espírito de descoberta que nos move sempre com a esperança de descobrir algo de novo. Mesmo que esse algo já tenha sido descoberto antes, o "investigador" sente que ele também teria sido capaz de ser o primeiro a descobrir, o que significa que o assunto em causa tem algo a ver consigo.

Passamos a descrever a construção do modelo.

Começamos por estabelecer uma correspondência entre quatro vértices da "casinha" e as letras A, B, C e D, como se pode observar na fig.2

Cedo verificámos que era insuficiente esta correspondência, pois o caminho BC não é único, havia que diferenciar dois caminhos e optámos por numerar os diversos caminhos (fig.3).

Começámos a construir o seguinte diagrama em árvore (fig.4)

No entanto, ao desenvolver a árvore, no ponto assinalado com um (*), ocorreu-nos uma ideia que viria a revelar-se fundamental no nosso estudo posterior: a colocação de um ponto E no ponto de intersecção dos caminhos 6 e 7. É claro que isto vai ser decisivo, pois a casa consegue ser construida sem usar as diagonais 6 e 7, de acordo com uma nova correspondência (fig.5)

Consegue-se por exemplo construir a "casinha" da seguinte maneira :

$A \xrightarrow{6} E \xrightarrow{7} B \xrightarrow{1} A$

$A \xrightarrow{5} D \xrightarrow{9} E \xrightarrow{8} C$

$C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{4} D$

Começámos seguidamente a pensar que a nossa missão era impossível, o diagrama, se já não era nada simples sem a inclusão desta nova hipótese surgida com o ponto E, agora tornava-se impraticável fazê-lo.

Pensámos então na hipótese de utilizar o computador, mas também não era simples a execução de um programa que avaliasse todas as hipóteses e que nos desse uma resposta eficaz, ou seja certa.

Começámos por resolver alguns problemas específicos para aproximarmos a nossa situação real de uma situação lógica. A solução de caminhos que tinhamos encontrado tornava-se agora muito complicada, pensámos então em estabelecer uma hierarquia entre os pontos e

Programa em GWBASIC para determinar todas as hipóteses de construir a "casinha"

```
10 CT1=1:CT2=0:CT3=0
20 DIM D(6):DIM D1(11,2):DIM D2(11):DIM D3(11)
30 IF CT1=7 THEN END
40 LPRINT "........................"
50 FOR F0=1 TO 11
60 READ B
70 D3(F0)=B:D2(F0)=0
80 NEXT F0
90 A=0
100 FOR F1=1 TO 11
110 IF D1(F1,2)<>D3(F1) THEN F1=11:GOTO 140
120 NEXT F1
130 CT1=CT1+1:GOTO 30
140 FOR F2=1 TO 11:D1(F2,1)=0:D1(F2,2)=0:NEXT F2
150 CT2=CT2+1
160 LPRINT USING "####";CT2;:LPRINT " - ";
170 C=0
180 P=CT1
190 CT4=0
200 D(1)=11100:D(2)=101010:D(3)=110110:D(4)=101011:
    D(5)=11101:D(6)=110
210 DATA 1,4,6,5,4,3,5,2,3,1,2,2,5,6,4,5,3,4,1,3,2,1,3,5,6,
    4,5,2,3,4,1,3,0
220 DATA 4,6,5,4,3,5,2,3,1,4,0,5,6,4,5,3,4,1,3,2,5,0,6,5,4,
    6,0,0,0,0,0,0,0
230 LPRINT CHR$(64+P);" ";
240 E=0:CT4=CT4+1
250 IF A=1 THEN GOSUB 450
260 IF D(P)=0 THEN GOTO 350
270 FOR F4=5 TO 0 STEP -1
280 AUX1=10^F4
290 AUX2=6-F4
300 IF D(P)>=AUX1 THEN GOSUB 500
310 NEXT F4
320 D(P)=D(P)-AUX1+C
330 C=0
340 D1(CT4,2)=P
350 IF E=0 THEN GOTO 530
360 P=AUX2:D1(CT4+1,2)=P:GOTO 240
370 A=1
380 FOR F5=11 TO 1 STEP -1
390 IF D1(F5,2)<>0 AND D1(F5,1)=0 THEN D2(F5)=D1(F5+1,2):
    G=F5:F5=1
400 NEXT F5
410 FOR F6=G+1 TO 11
420 D2(F6)=0
430 NEXT F6
440 LPRINT " ":GOTO 100
450 IF D2(CT4)<>0 THEN C=0 ELSE RETURN
460 FOR F3=1 TO D2(CT4)
470 IF D(P)>=10^(6-F3) THEN D(P)=D(P)-10^(6-F3):
    C=C+10^(6-F3)
480 NEXT F3
490 RETURN
500 LPRINT CHR$(70-F4);" ";:D(AUX2)=D(AUX2)-10^(6-P):E=1:
    F4=0
510 IF D(P)=AUX1 THEN D1(CT4,1)=1
520 RETURN
530 D1(CT4,1)=2
540 IF CT4=11 THEN CT3=CT3+1:LPRINT "   (SOLUÇÃO ";:
    LPRINT USING "###";CT3;:LPRINT ")";
550 GOTO 370
```

fomos obrigados a criar um novo ponto que fizesse a distinção entre os antigos caminhos 2 e 3. Assim estabelecemos a seguinte correspondência (fig.6).

Esta ordem é a pedra angular de tudo o que se vai seguir a nível de programação.

Um programa de computador

É óbvio que o computador não sabe o que é a "casinha".

Através do programa, o computador foi apenas "informado" das hipóteses de caminhos consideradas na fig.7, e ainda que após ter efectuado um dado caminho não poderá repeti-lo nem pelo mesmo sentido nem por sentido inverso.

O programa foi feito para que se analisassem exaustivamente todas as hipóteses partindo das de "valor" mais baixo até às de "valor" mais alto, sem depender da acção do utilizador. Isto quer dizer que após introduzir o programa em GWBASIC num computador que aceite esta linguagem (ver caixa), obtém-se 1248 (mil duzentas e quarenta e oito!) sequências, das quais 240 (duzentas e quarenta!!) são solução.

Analisando as soluções verificamos que somente quando se parte dos pontos A ou B se tem hipótese de sucesso e que quando se parte do ponto A, acaba-se obrigatoriamente no ponto B e vice-versa. As 240 soluções dividem-se de igual modo pelos dois pontos, ou seja 120 quando se começa em A e 120 quando se começa em B.

Terminamos o nosso artigo reafirmando a importância da construção de modelos matemáticos, e em todas as outras disciplinas e situações da vida real, e afirmando também que a construção desses modelos pode ser muito facilitada se se conhecer a teoria dos grafos.

J. Francisco Furtado
Nuno Rei
Alunos da Licenciatura em Ensino da Matemática.

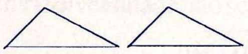
Carta aberta aos autores dos novos programas

Iguais, geometricamente iguais ou simplesmente... *congruentes* ?

Caros colegas

Esta carta tem um único fim: convencer-vos a que passem a usar a palavra congruentes em vez de geometricamente iguais, na próxima revisão dos programas.. Vou explicar a minha ideia.

Os dois triângulos da figura seguinte são iguais?



Na linguagem corrente, certamente que sim (ou pelo menos parecem). Em matemática não, porque dois objectos são iguais quando são o mesmo objecto, e aqui temos certamente dois triângulos distintos. Está claro que se um miúdo com doze anos me disser que os dois triângulos são iguais, eu fico mais do que satisfeito e penso de mim para mim: "está bem, eu sei o que tu queres dizer, a pouco e pouco irás percebendo pela tua própria experiência que precisas de refinar o teu conceito de igualdade em matemática...". Mas eu, como professor que vou ajudar os alunos, ao longo da sua vida escolar, a tornar mais rigoroso o modo como comunicam em matemática, tenho que ter preparada, para quando for precisa, outra palavra para substituir a palavra "igual". Daí o "geometricamente igual". Alguns dirão, que mal há em adoptarmos este modo de dizer? Parece-me que há muito mal e que a experiência tem mostrado precisamente isso:

- Na maior parte dos casos, a dupla "geometricamente igual" é um modo tão rebuscado de exprimir uma ideia que o *geometricamente* acaba por cair, ficando apenas *igual*. Mas então não se avançou nada, do ponto de vista da comunicação, e agora a situação é pior: a duas ideias que se sabe serem diferentes, continua a corresponder a mesma palavra, quando o que se pretendia era refinar o conceito. Até vocês, caros colegas, se aborrecem por vezes de dizer geometricamente iguais e dizem "ângulos iguais" e acrescentam em nota: "usaremos 'iguais' em vez de 'geometricamente iguais'" (Materiais de apoio aos novos programas, Ens. Sec., texto de apoio às fichas G1 e G2).
- Mesmo se não se reduz a "igual", "geometricamente igual" pode dar a falsa ideia de que existe um conceito de igualdade em geometria, porventura outro em álgebra, e assim por diante, o que está claro é errado.

Eu julgo que a boa regra é a seguinte: cada novo conceito, quando está devidamente identificado e interiorizado pelos alunos, pode e deve receber uma nova designação. Porque não "congruente"? Eu iria jurar mas não tenho a certeza, nem tempo para ir investigar, que esta palavra já foi usada neste sentido em português. Em qualquer caso, os anglo-saxónicos usam "congruent". Os franceses usam "isométrique" no mesmo sentido, mas gosto menos.

Duas observações:

a) Julgo que foi Sebastião e Silva que introduziu o hábito do "geometricamente igual". Mas, está claro, isso não nos impede de ir evoluindo como o próprio Sebastião e Silva faria, se a prática viesse a provar que uma ideia não tinha sido feliz. Julgo que não é muita ousadia introduzir um termo novo numa época que se pretende de reforma completa dos programas de Matemática...

b) Enquanto para os polígonos me parece importante incorporar, na altura própria, o conceito de "congruência", em lugar do de "igualdade geométrica", julgo que seria talvez pretensioso aplicá-lo sistematicamente a segmentos e a ângulos, e tornaria os textos muito pesados. Penso que devemos continuar a dizer "segmentos iguais" e "ângulos iguais", explicando uma vez por todas que se trata de modos abreviados de nos referirmos a "segmentos de igual comprimento" ou "ângulos de igual amplitude". Sem mais, por hoje

Eduardo Veloso