E a Lua Aqui Tão Perto

(a propósito do estudo das progressões geométricas)

Paulo Abrantes, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Há cerca de um ano, uma professora estagiária procurou-me para me pedir uma sugestão de trabalho que pudesse ser motivadora para os alunos do 11.º ano a propósito do estudo das progressões geométricas. Não se sentia particularmente entusiasmada com as ideias mais usuais (como, por exemplo, a do prémio pedido em grãos de trigo pelo inventor do jogo de xadrez) porque, segundo ela, os alunos encontrariam certamente esses exemplos nos manuais ou nos livros de Matemática Recreativa.

Sugeri-lhe então que explorasse uma situação imaginária, provavelmente menos conhecida, que consistia em supor-se que poderíamos dobrar ao meio sucessivamente uma folha de papel até atingirmos uma determinada altura. Concretamente, o problema poderia ter o seguinte enunciado:

Quantas vezes seria necessário dobrar ao meio uma folha de papel para se atingir a distância da Terra à Lua?

Pusemos esta questão a algumas pessoas que entretanto encontrámos, pedindo apenas um palpite sobre a ordem de grandeza do resultado. Obtivemos respostas do tipo: um milhão; biliões; um milhão elevado a um milhão.

Obviamente, estas respostas (em especial a última) revelam um incrível desconhecimento da ordem de grandeza destes «números grandes». A «melhor» resposta que obtivémos, no entanto, foi a de uma assistente do Departamento de Matemática da Faculdade que disse: «Estas situações envolvendo progressões geométricas enganam muito... o número não deve ser muito superior a 500».

Para determinar com exactidão o número pedido era necessário conhecer a distância da Terra à Lua (consultámos um livro de Astronomia e ficámos a saber que era de 384400 km aproximadamente) e atribuir um valor à espessura da folha de papel (estimámos que 0.1 mm corresponderia a uma folha bastante fina).

Depois disso, um computador executaria facilmente os cálculos, através de um programa muito simples em BASIC:

```
10 LET X=0.0001
20 LET N=1
30 PRINT N, 2 * X
40 LET X= 2 * X
50 IF X> = 3844 * (10↑15) THEN STOP
60 LET N=N+1
70 GO TO 30
```

Apresentam-se, a seguir, alguns extractos da resposta obtida com este programa, indicando-se, na coluna da esquerda, o número de dobragens e, na da direita, o correspondente valor da altura atingida (de notar que este é dado em metros):

1	.0002
1	.0002
2	.0004
3	.0008
4	.0016
5	.0032
....	....
13	0.8192
14	1.6384
15	3.2768
16	6.5536
....	....
37	13743895
38	27487791
39	54975581
40	1.0995116E+8
41	2.1990233E+8
42	4.3980465E+8

Ficámos assim a saber que, após a 42.ª dobragem, a distância da Terra à Lua seria largamente ultrapassada. Este resultado não deixa de ser algo surpreendente mesmo para quem está «de pé atrás» em relação ao problema proposto.

A forma como a aula decorreu veio confirmar as nossas expectativas. O problema despertou nos alunos um grande interesse e curiosidade, pelo que acabou por constituir uma excelente motivação para o estudo das progressões geométricas.

Por esta altura, o problema tornou-se alvo de conversas com colegas e com alunos. Curiosamente, apenas uma pessoa (um professor de Matemática, claro...) se dispôs a utilizar lápis e papel antes de arriscar uma resposta:

$$10^{-4} \times 2^n \geqslant 3844 \times 10^5$$
$$2^n \geqslant 3844 \times 10^9$$
$$n \geqslant \log_2 (3844 \times 10^9)$$
$$n \geqslant \log_2 3844 + 9 \times \log_2 \ 10$$
$$n \geqslant (\ln 3844/\ln 2) + 9 \times (\ln 10/\ln 2)$$

e com o auxílio de uma calculadora:

$$n \geqslant 11.908 + 9 \times 3.322$$
$$n \geqslant 41.806$$

Este resultado confirmou, naturalmente, aquilo que já sabíamos. O que é curioso é que o professor referido, ao chegar a este ponto, exclamou «não pode ser!» e dispôs-se a verificar cuidadosamente todos os cálculos que efectuara.

De facto, parece haver uma importante diferença entre obter-se um resultado e «sentir-se» esse resultado. Esta diferença pode ter implicações na aprendizagem da Matemática. Muitas vezes, perante uma abordagem lógica, o aluno sente-se forçado a aceitar determinada conclusão mas fica com a impressão de que algo lhe escapa. Utilizando uma expressão da linguagem corrente, dir-se-ia que fica vencido mas não convencido...

A este respeito, pode ser interessante reflectir-se no que ocorreu quando o mesmo problema foi utilizado por uma outra professora numa escola diferente e de um modo diverso do anterior. Neste caso, a situação foi proposta como uma aplicação do estudo, já anteriormente feito, das progressões geométricas. O programa foi ligeiramente modificado para se salientar o que era o 1.º termo, a razão, o valor do termo de uma dada ordem, etc. O facto de surgirem no ecrã todos os termos até ao 42.º (o que, aliás, já sucedia na primeira versão) revelou-se útil pois alguns alunos sentiram necessidade de examinar os sucessivos valores para compreenderem a situação. Isto deu lugar a observações do tipo «chega-se à Lua em 42 dobragens mas com 41 ainda se vai a meio caminho e com 40 está-se muito mais perto da Terra» ou «com 14 dobragens ainda mal se atingiu a altura de uma pessoa».

Bastante significativa terá sido a atitude de um aluno que, quando a aula terminou, pediu para fazer algumas modificações no programa. Começou por mudar o valor inicial de X (espessura da folha de papel), fez algumas experiências variando esse valor e observou os resultados obtidos. O número final de dobragens não se alterava substancialmente com essa variação. Depois, substituiu a distância da Terra à Lua e verificou o que sucedia com diferentes valores, maiores ou menores. Não fez praticamente qualquer pergunta, agradeceu, despediu-se e saiu da sala.

Aquilo que este episódio me sugere é a importância que julgo dever ser atribuída a actividades em que os alunos tenham liberdade para realizar experiências pessoais podendo assim procurar respostas para as suas dúvidas. Quando se tenta aprender qualquer coisa, muitas vezes só o próprio sabe quais são as perguntas para as quais precisa de resposta, e elas podem não ser exactamente as mesmas que ocorreriam a uma outra pessoa numa situação idêntica.

Surge assim a ideia de substituir, no processo de ensino-aprendizagem, o esquema «certo ou errado» por uma abordagem do tipo «que acontece se...». De facto, a exploração sugerida a propósito do problema das dobragens sucessivas pode conter este aspecto que é comum quando se trabalha com simulações e que permite colocar o aluno no papel de «investigador» em vez de lhe atribuir a tarefa habitual de dever acertar na solução pré-estabelecida. O problema aqui apresentado envolve uma situação artificial cujo único interesse parece ser de natureza matemática mas esta perspectiva de trabalho — que é aceite, com mais naturalidade, no estudo das ciências experimentais, envolvendo simulações de fenómenos ou situações reais — pode ser muito útil na aprendizagem da Matemática.

A ideia de poder mudar os valores de uma ou mais variáveis (ou de factores aleatórios), analisar os efeitos produzidos por essas mudanças e tentar, a partir daí, extrair conclusões ou apenas interpretar melhor a situação que se está a estudar, sugere imediatamente o uso do computador. Foi, afinal, o que se fez neste caso, tendo-se construido um programa muito simples em BASIC. Contudo, uma alternativa à programação poderia ser o uso de uma «spreadsheet» (folha de cálculo electrónica).