

Frações, razões e taxas: que trabalho em matemática para uma utilização com compreensão na resolução de problemas nas várias disciplinas?

MANUELA PIRES

No Agrupamento de Escolas a que pertenço, os alunos sentem alguma dificuldade na compreensão de conceitos trabalhados em matemática, também utilizados na física e química, biologia e geologia, geografia, economia, nomeadamente, raciocínio multiplicativo versus aditivo, número racional, fração, razão e taxa.

Para percebermos melhor como é que os alunos trabalham esses conceitos ao longo dos anos e o porquê das fragilidades, foram realizadas oficinas de formação por ciclo, do ensino básico e secundário, durante o ano letivo 2018/19, com sessões que envolveram mais do que um ou mesmo todos os ciclos, com a finalidade de planificar, avaliar e articular entre ciclos para melhorar as aprendizagens em matemática.

O trabalho consistiu na análise de documentos curriculares de referência e seleção de tarefas, envolvendo avaliação formativa, com vista à sua implementação em sala de aula, sempre que possível em codocência. Um dos focos da formação foi a discussão entre professores de anos e ciclos diferentes sobre a adequação das tarefas aos alunos em cada ano de escolaridade. Discutiram-se conceitos e procurou-se unificar a linguagem.

A importância das sessões conjuntas foi salientada por vários professores nos relatórios de reflexão final, referindo-se que “Partindo-se da análise de vários documentos, e de experiências partilhadas, foram abordadas questões muito importantes sobre as principais temáticas da Matemática, por exemplo, a definição de proporcionalidade direta e sua adequação ao nível dos alunos e ao longo dos ciclos, e sobre a avaliação nesta disciplina, principalmente acerca dos instrumentos de avaliação, com compromissos acordados por todos os participantes que terão algum impacto nas planificações”.

Os recursos “Teaching fractions and ratios for understanding” (Lamon, 2006) e “Mathematics Assessment Project” (MAP)¹, apresentados num artigo de Malcon Swan (2017/2018) serviram de base e inspiração a este trabalho. Neste último encontramos muitas das tarefas exploradas nas aulas, que na opinião de uma das professoras apresentam vários pontos fortes: “Com a sua implementação na prática, verificou-se que este tipo de aula apresenta vários pontos fortes, tais como: a existência de uma maior motivação por parte dos alunos, uma vez que foi claro

que eles gostam de trabalhar em grupo, (...) a importância de o desenvolvimento das tarefas permitir que sejam os próprios alunos a mobilizar conhecimento e procurar estabelecer conexões entre as várias representações, (...) uma forte aposta na importância da comunicação entre pares e na necessidade de explicitação de argumentos perante os outros, tanto em grupo alargado, como perante o grupo-turma.”

O trabalho com os sentidos dos números racionais, como quociente, parte/todo, medida, operador e razão, ocupou uma boa parte das oficinas de formação, mas é sobre o sentido de razão, comum a contextos trabalhados em várias disciplinas, que irei refletir neste texto.

FRAÇÕES, RAZÕES E RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Um dos conceitos que clarificamos foi o de fração, porque existem diferentes interpretações: (1) como comparação parte-todo; (2) como número racional e (3) como número escrito na forma simbólica $\frac{a}{b}$. Consideramos que “Frações são símbolos bipartidos, uma forma para escrever números: $\frac{a}{b}$ ”. “Neste sentido, a palavra fração refere-se a um sistema notacional, um símbolo, dois inteiros escritos com uma barra entre eles, representações de números racionais e irracionais, tais como $-\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\sqrt{4}}{2}, -\frac{12.2}{14.4}, \frac{1}{2}$ ” (Lamon, 2006). Os conceitos referidos em (1) e (2) são, no entanto, os mais utilizados nos manuais do ensino básico, embora apresentem várias limitações.

Desde cedo, os alunos trabalham razões como comparação de duas grandezas, quer sejam do mesmo tipo ou não. Quando se comparam grandezas do mesmo tipo, a comparação pode ser entre a parte e o todo ou entre partes e podemos assumir que razão de dois números se pode tomar como sinónimo de quociente desses números (Caraça, 1970). Encontram-se situações em que *razão* é um dos sentidos de número racional, na comparação entre a medida de parte de um conjunto, com a medida de outra parte do conjunto, por exemplo, a razão entre o número de raparigas e de rapazes de uma turma $\frac{10 \text{ raparigas}}{15 \text{ rapazes}}$, e outras em que é um número irracional, como a razão entre o comprimento (c) de uma circunferência e o respetivo diâmetro (d): $\frac{c}{d} = \pi$ (2.º CEB) ou a razão entre o lado de um quadrado e a sua diagonal: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (7.º ano).

¹ <http://map.mathshell.org/lessons.php?collection=8&unit=8225>

No 6.º ano é introduzido formalmente o significado de razão, em que assenta o conceito de proporção. Define-se razão como quociente de dois números ou o quociente de duas quantidades/grandezas comparáveis e introduz-se uma nova notação (a:b), impondo a condição de b diferente de zero e a proporção como igualdade de duas razões.

Em matemática, nos manuais dos 2.º e 3.º CEB privilegia-se a fração como número, o número racional subjacente, perdendo-se os contextos e os sentidos. Não se questiona o que representam numerador e denominador, em cada um dos sentidos e mecanizam-se regras de cálculo. Em paralelo, no início do estudo das razões, trabalha-se habitualmente a ferramenta regra de três simples, talvez porque é um processo mecânico de fácil utilização, eficaz para obter resultados. Infelizmente, esta transforma-se numa muleta de cálculo, e desvia os alunos da compreensão do significado de razão, pelo que, não é uma mais valia na compreensão das quantidades comparadas. Temos que perceber se os alunos desenvolveram o raciocínio proporcional, se são capazes de compreender contextos e aplicações com base na proporcionalidade e se têm a capacidade de analisar as mudanças em termos absolutos e relativos. A persistência tem que ser na compreensão, pelo que o trabalho deve incidir nas razões e na igualdade de razões e, a longo prazo, só vemos desvantagens na utilização da regra de três simples.

Acresce que, quando se comparam grandezas de tipo diferente se obtém uma nova grandeza, que não é facilmente representada e cujo nome não é o de nenhuma das grandezas originais, pelo que é necessário que se mantenham os rótulos nas grandezas que se comparam, são exemplo a velocidade = $\frac{280 \text{ km}}{3,5 \text{ h}} = 80 \text{ km/h}$ e a densidade = $\frac{12 \text{ g}}{50 \text{ cm}^3} = 0,24 \text{ g/cm}^3$, situações trabalhadas em física e química e matemática.

Pensamento absoluto e relativo

Considera-se que há crescimento absoluto quando se trata do crescimento real independente e não relativo a outrem, ou seja, adiciona-se uma quantidade. No caso de uma planta que mede 4 cm de comprimento e cresceu 8 cm, passou a medir 12 cm (4+8=12). Há crescimento relativo, quando se relaciona o crescimento esperado com o tamanho atual. No exemplo, a planta cresceu o dobro do comprimento inicial (2x4=8), então o comprimento final da planta é o triplo do comprimento inicial (3x4=12). Multiplica-se pelo fator 3 (1+2 - unidade inicial+ crescimento relativo à inicial (dobro)). Assim, podemos referir o pensamento absoluto como aditivo e pensamento relativo como multiplicativo. Os alunos mais pequenos são mais propensos a ser pensadores absolutos.

Distinguir as situações que exigem pensamento relativo das que não o exigem é uma tarefa muito difícil. Temos de aproveitar todas as oportunidades para solicitar aos alunos que pensem numa comparação de quantidades quer de forma aditiva (na comparação de dois comprimentos, a pergunta “Qual é

o maior?”), quer de forma multiplicativa, em relação a outra (“Quanto maior é a planta relativamente à inicial?”).

O raciocínio proporcional mobiliza pensamento relativo e requer argumentação e explicação além do uso de símbolos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Este é um trabalho que tem de ser realizado de forma contínua ao longo da escolaridade, pois como refere Lamon (2006):

Claramente, muitas pessoas que não desenvolveram sua capacidade de raciocínio proporcional foram capazes de compensar usando regras em álgebra, geometria e trigonometria, mas, no final, as regras são um substituto pobre da compreensão. Elas não estão preparadas para aplicações reais em estatística, biologia, geografia ou física - quando são importantes os princípios fundamentais que se baseiam na proporcionalidade. Isso é lamentável num momento em que um número cada vez maior de profissões confia diretamente na matemática ou usa modelação matemática para aumentar a eficiência, salvar vidas, economizar dinheiro ou tomar decisões importantes. (p. 3)

No âmbito de uma oficina de formação², decidimos realizar o problema da altura das árvores³ (figura 1), em turmas do 7.º, 8.º, 9.º, 10.º e 12.º com o objetivo de perceber melhor o estado da arte relativamente ao raciocínio proporcional. A pergunta está feita propositadamente de forma ambígua, para perceber se os alunos pensavam de forma absoluta ou relativa.

A altura das árvores

No quintal do Sr. Antunes há duas árvores, a árvore A e a árvore B. Há uns tempos atrás, a árvore A media 8 metros e a árvore B media 10 metros de altura. Agora a árvore A mede 14 metros e a árvore B mede 16 metros de altura.

Qual a árvore que mais cresceu? Explica como pensaste.

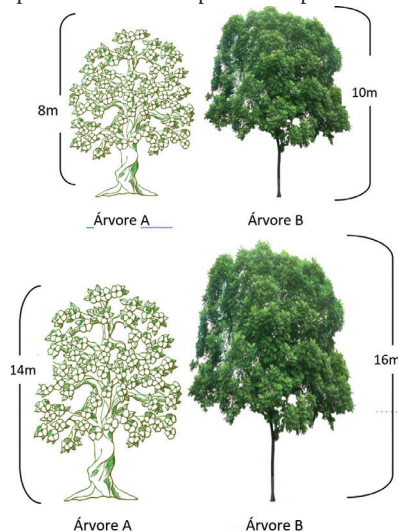


Figura 1. Tarefa “A altura das árvores”

A esmagadora maioria dos alunos dos diferentes anos de escolaridade responderam que as árvores cresceram o mesmo – 6 metros, ou seja, fizeram um raciocínio absoluto, aditivo. Estes alunos fizeram resoluções como as da figura 2.

² Oficina de formação, acreditada pela APM, Aprender Matemática nos 2º e 3º CEB - Números, operações, álgebra e funções, dinamizada por Adelaide Cosme, Isabel Rocha e Manuela Pires realizada em 2018.

³ Adaptado de Lamon (2006)

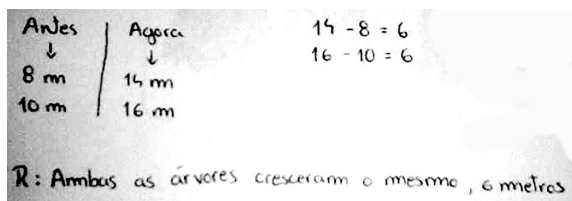


Figura 2. Resposta ao problema da figura 1, com raciocínio aditivo

Estes alunos podem conhecer razões e proporções, mas não mobilizam este raciocínio de forma natural. Quando, numa turma do 10.º ano analisámos as respostas na aula, um dos alunos disse: “a professora devia ter perguntado qual a árvore que cresceu mais, proporcionalmente”. Não podemos dizer que uma perspetiva está errada e a outra correta. No entanto, é necessário ir além da mera contagem e do pensamento absoluto. Vejamos situações em que os alunos fizeram um raciocínio multiplicativo. Dos alunos que responderam árvore A, a resolução do 9.º ano (figura 3), utiliza razões, comparando a altura final com a inicial de cada árvore.

$$A = \frac{14}{8} = 1,75$$

$$B = \frac{16}{10} = 1,6$$

A árvore A cresceu mais.

Figura 3. Resposta da aluna do 9.º ano ao problema da figura 1

Na resolução do 12.º ano (figura 4), a opção pela regra de 3 simples e percentagens leva a que o aluno perca o sentido dos cálculos. Compara os comprimentos iniciais da árvore B e da A e os comprimentos finais, percebendo que a diferença é menor na altura final de ambas, o que significa que B cresceu menos. No entanto, 25% não representa o crescimento, pois compara as alturas iniciais.

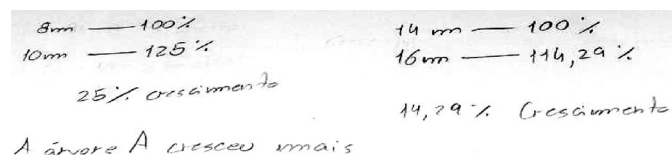


Figura 4. Resposta de um aluno do 12.º ano ao problema da figura 1

Nas resoluções apresentadas nas figuras 5 e 6, os alunos definem estratégias adequadas, mas não concluem corretamente. O aluno do 8.º ano (figura 5), faz um raciocínio proporcional investigando quanto deveria medir a árvore B se crescesse na mesma proporção da A.

A aluna do 7.º ano (figura 6) fez corretamente o cálculo da equivalência das frações, mas a resposta está incorreta, pois considerou o dual⁴ da razão, ou seja, calculou a razão entre a

altura inicial e final. As duas razões dão as mesmas informações sobre as proporções, mas as razões são pares ordenados e ao mudar a ordem dos termos têm-se uma razão diferente. O valor da fração no caso B é maior, mas isso significa que se as árvores no final tivessem a mesma altura (56), a altura inicial da B (35) é maior que a de A (32), logo a árvore A cresce mais.

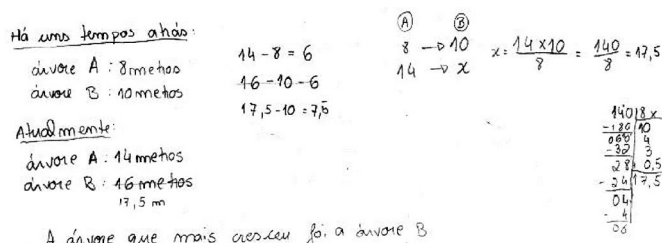


Figura 5. Resposta de um aluno do 8.º ano ao problema da figura 1

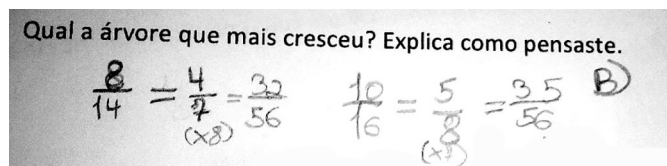


Figura 6. Resposta de uma aluna do 7.º ano ao problema da figura 1

Estes exemplos reforçam a ideia de que para desenvolver o raciocínio proporcional devemos resolver problemas em contextos concretos e próximos dos alunos, trabalhar com razões e igualdades de razões, conservando os rótulos das grandezas com que se está a trabalhar. Este foi um dos pressupostos que tivemos em conta quando selecionámos e preparámos tarefas nas oficinas.

TAREFAS DE CONTEXTO INTERDISCIPLINAR

Em matemática trabalha-se o conceito de função, para representar e analisar situações em contextos matemáticos e não matemáticos, desde o 7.º ano. Função linear no 7.º e afim no 8.º, com o estudo dos declives. Em física e química, de acordo com as aprendizagens essenciais, trabalham-se movimentos, rapidez média e velocidade no 9.º ano, com construção e interpretação de gráficos de posição tempo de movimentos retilíneos, aplicando-se os conceitos de distância percorrida e de rapidez média a esses movimentos. No entanto, há manuais e escolas que introduzem alguns destes conceitos no 7.º ano. Relativamente à construção e interpretação de gráficos velocidade-tempo para movimentos retilíneos, aplicando o conceito de aceleração média, referem a restrição de não existir inversão de sentido do movimento. Quando se trabalham problemas em contexto físico, há consonância de conceitos nas duas disciplinas? Que dificuldades apresentam os alunos?

Na preparação de tarefas envolvendo funções, no grupo do 3.º CEB da oficina, analisámos gráficos de distância percorrida/

⁴ Neste texto utilizo o termo dual no sentido dado em Lamon (2006). Cada razão tem um dual. As duas razões dão as mesmas informações sobre as proporções,

mas as razões são pares ordenados e não só se obtém uma razão diferente ao mudar os termos, como para fazer comparações temos que garantir que os termos têm a mesma ordem.

tempo e de posição/tempo, declives e funções afins e constatámos que podemos estar a usar o termo velocidade em linguagem corrente, sem fazer a ponte com o seu uso em física.

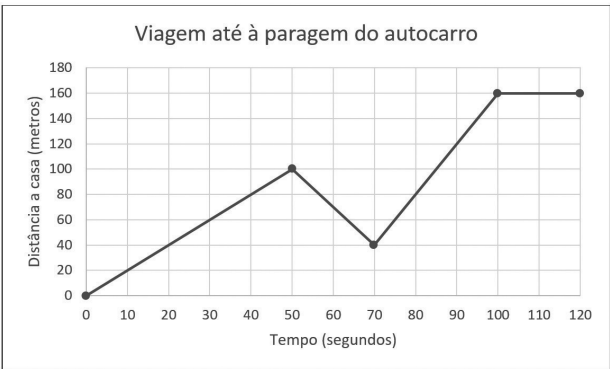
Selecionei duas situações, uma por ter um contexto realista de movimentos e outra por trabalhar as razões nos declives das retas, conceitos comuns às duas disciplinas.

Interpretando gráficos de distância-tempo⁵

No 7.º ano, antes das aulas para desenvolvimento de conceitos envolvendo funções, os alunos realizaram uma tarefa de avaliação formativa “Viagem até à paragem do autocarro” (figura 7), com o objetivo de avaliar como interpretam gráficos de distância-tempo (neste caso um gráfico de posição) e, em particular, identificar alunos que (1) Interpretam gráficos de distância-tempo como se fossem imagens de situações, em vez de representações abstratas e que (2) têm dificuldade em relacionar as velocidades com os declives dos respetivos gráficos. Os professores analisaram o trabalho usando uma “tabela de erros”, um recurso que faz parte de cada um dos materiais do projeto MAP e uma fonte de inspiração para questões a colocar aos alunos (figura 8).

Viagem até à paragem do autocarro

Todas as manhãs, o António caminha por uma estrada em linha reta, desde a sua casa até à paragem do autocarro, que se encontra a uma distância de 160 metros.
O gráfico mostra o seu percurso num desses dias



- De acordo com o gráfico, descreve o percurso efetuado pelo António. Deves incluir detalhes como por exemplo, a rapidez com que este se deslocou.
- Todas as etapas do gráfico estão de acordo com a realidade? Explica a tua resposta.

Figura 7. Tarefa de avaliação formativa realizada no 7.ºano

Nas aulas do desenvolvimento do conceito, após um exemplo do professor, os alunos trabalharam em pequenos grupos, combinando cartões que têm três tipos de representações: (A) Gráficos de Distância – Tempo; (B) Histórias e (C) Tabelas de Dados. Colaram os conjuntos numa cartolina e deram explicações

⁵Adaptado de Interpreting Distance-Time Graphs, in <https://www.map.mathshell.org/lessons.php?unit=8225&collection=8>; Todos os materiais foram traduzidos e estão disponíveis em <https://drive.google.com/drive/folders/1ig1n0rBkZ0LA9lvw7usxpVpOWZqtHZ9p?usp=sharing>

para a correspondência entre os cartões. Nas figuras 9 e 10, mostram-se dois exemplos das correspondências realizadas.

Erros/ problemas comuns:	Sugestões de perguntas:
O aluno interpreta o gráfico como uma imagem Por exemplo: o aluno assume que, como o gráfico sobe e desce, o caminho do António sobe e desce. Ou: O aluno assume que uma linha reta num gráfico significa que o movimento é ao longo de um caminho em linha reta. Ou: O aluno acha que o declive negativo significa que António fez um desvio.	- Se uma pessoa andou em círculo à volta de casa, como será o gráfico? - Se uma pessoa andou a uma velocidade constante, subindo e descendo uma colina, a partir de casa como será o gráfico? - Em cada etapa da sua viagem, António vai com velocidade constante ou esta muda? Como podes saber? - Como podes descobrir a velocidade de António em cada etapa da viagem?
O aluno interpreta o gráfico como velocidade-tempo O aluno interpretou um declive positivo como aceleração e um declive negativo como desaceleração.	- Se uma pessoa andou um quilómetro a uma velocidade constante a partir de casa e depois voltou para casa com a mesma velocidade constante, como será o gráfico? - Como muda a distância durante a segunda etapa da viagem do António? Qual o seu significado? - Como podes saber se António está a caminhar de ou para casa?
O aluno não calcula nem representa a velocidade Por exemplo: O aluno não trabalhou a velocidade de algumas/ todas as etapas da viagem. Ou: O aluno descreveu a velocidade para uma etapa como a distância percorrida no tempo gasto, como “20 metros em 10 segundos”.	- Podes dar informação sobre a velocidade a que António andou durante as diferentes etapas da sua viagem? - Podes escrever a velocidade como metros por segundo?
O aluno acrescenta pouca explicação sobre o motivo pelo qual o gráfico é ou não realista	Qual é a distância total que António percorre? Isso é realista no tempo decorrido? Porque sim ou porque não?

Figura 8. Lista parcial de erros/problemas comuns e sugestões de perguntas na realização da tarefa da figura 7

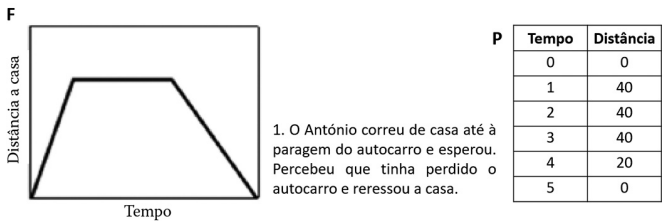


Figura 9. Correspondência entre 3 representações: gráfico, história e tabela

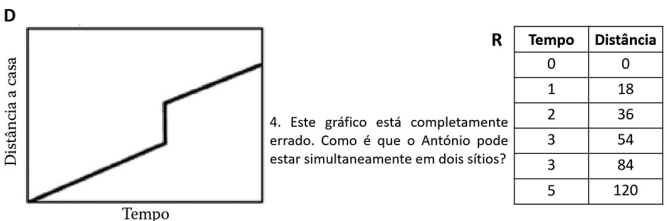


Figura 10. Uma situação que não é função.

Retas, declives e equações

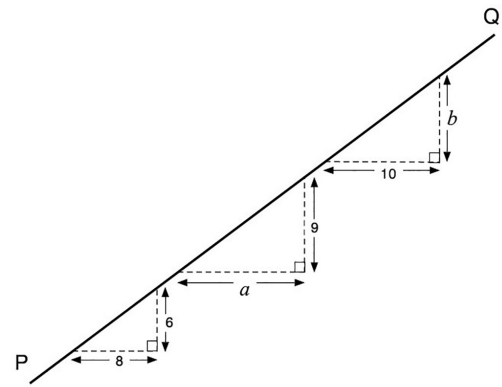
Na atividade, alguns alunos tiveram dificuldade em apontar onde está a casa no gráfico. Para desbloquear, o professor colocou questões como: *Neste gráfico, onde começa a viagem?*; *A casa é aí?*; *Dá-me um gráfico que mostre uma viagem que não comece em casa*; *Neste gráfico, a viagem termina em casa?* *Como sabes?*. Relativamente às dificuldades sobre a velocidade, foram colocadas questões do tipo: *A velocidade do António é menor ou maior nesta etapa em comparação com esta?* *Como explicas isso a partir do gráfico?* *E da tabela?* *Esta velocidade é constante?* *Como sabes?* *Quais os dados da tabela que mostram uma velocidade constante nesta etapa da viagem?* *Em que unidades pode ser medida?* *Estes números são realistas?*

Durante a aula fez-se uma discussão em coletivo, onde os alunos explicaram o seu raciocínio, o que se revelou bastante benéfico para as suas aprendizagens, como refere uma professora “Nesta tarefa houve interajuda entre os alunos, foi muito interessante vê-los a defender e explicar o seu raciocínio aos outros. Por fim, os alunos retornam à sua ficha diagnóstico e tentam melhorar as respostas individuais, após o que realizam uma nova ficha individualmente”.

Definir retas por pontos, declives e equações⁶

“Definir retas por pontos, declives e equações” foi uma tarefa realizada nas turmas do 8.º ano, sendo o desenvolvimento das aulas semelhante ao descrito na tarefa anterior. Houve uma investigação inicial sobre declives a partir da marcação de três pontos (não) colineares e da semelhança de triângulos (apresentação parcial na figura 11), seguida de um trabalho de grupo (12 cartões a associar em pares), parcialmente apresentada na figura 12, e correspondente discussão em coletivo. Posteriormente foi feita (revisitada) uma tarefa que permitiu a consolidação da forma de determinar o declive de uma reta que passa por dois pontos.

Segundo um dos professores que implementou as tarefas “A aprendizagem da determinação do declive de uma reta foi mais facilitada com esta abordagem e mais alunos aprenderam, em grupo, a fazê-la.” Depois da associação dos cartões representada na figura 12, o professor refere que se verificou “que na tarefa revisitada a dúvida quase que tinha desaparecido. A maior vantagem é permitir ao aluno um envolvimento mais ativo, empenhando-se e ajudando os elementos do seu grupo e de outros grupos. E, ao professor, permite estar mais focado no tipo e na essência das dificuldades dos seus alunos, reparando nas suas dúvidas, ouvindo-os, fazendo perguntas de modo frequente e de estímulo da aprendizagem, e ajudando os alunos em cada um dos grupos, e no geral, aquando da discussão com toda a turma, nos seus raciocínios.”



1. A figura seguinte tem representada a reta PQ e por baixo dessa reta foram desenhados três triângulos retângulos semelhantes. Os triângulos não estão desenhados à escala.

Calcula os comprimentos marcados com a e b. Mostra o teu raciocínio.

Figura 11. Questão 1 da tarefa de avaliação formativa realizada no 8.º ano

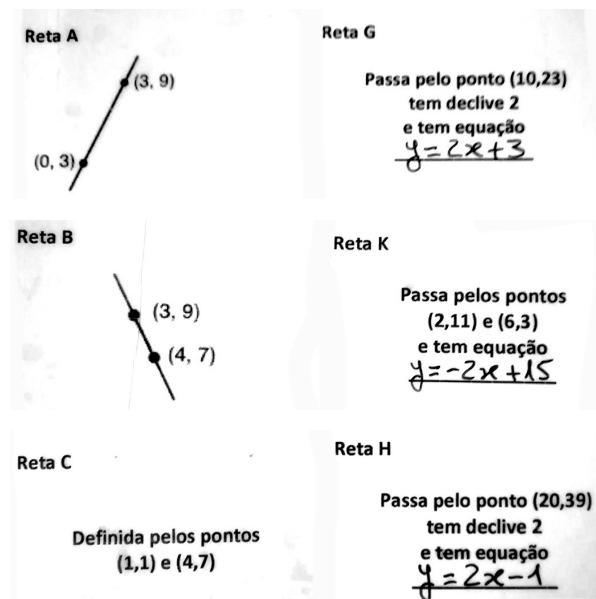


Figura 12. Associação de pares de cartões que representam a mesma reta

O CASO DA VELOCIDADE

Quando trabalhamos problemas, como os apresentados anteriormente, identificamos dois tipos de dificuldades: a primeira prende-se com o conceito de razão e o uso comum do termo velocidade e a segunda, com os conceitos de rapidez (grandeza escalar) e velocidade (grandeza vetorial), tendo ambos uma complexidade intrínseca.

Razões e uso comum do termo velocidade

Quando dividimos as grandezas distância percorrida e o tempo necessário para a percorrer, referimo-nos à nova grandeza, em linguagem corrente, como velocidade. Mas, enquanto distância

⁶ Adaptado de “Defining Lines by Points, Slopes and Equations, in <https://www.map.mathshell.org/lessons.php?unit=8215&collection=8>; Todos os materiais foram traduzidos e estão disponíveis em https://drive.google.com/drive/folders/1M_ISBX7KO0whrSI0nOKRE1zKhdcS9S-K?usp=sharing

e tempo são grandezas que podemos medir, a velocidade não. É uma grandeza para o movimento que se obtém comparando duas outras grandezas. A maioria das pessoas não percebe que a velocidade é uma quantidade composta, a comparação de uma distância com um tempo. Assim, quilómetros por hora⁷ é usado como uma frase, um rótulo para a velocidade, e não se pensa na forma como a velocidade é calculada. Este equívoco é alimentado pela leitura do velocímetro que parece ‘medir’ a velocidade. Os alunos podem conhecer a fórmula distância=velocidade × tempo e substituir mecanicamente dois números (sem os rótulos) na fórmula para encontrar o terceiro, mas compreender as relações leva muito tempo.

Muitas vezes os professores de física e química ‘queixam-se’ que os alunos ‘têm dificuldades em calcular’, mas esta não é apenas uma questão de cálculo. Por exemplo, no 1.º troço do percurso do António para a paragem do autocarro (figura 7), 2 m/s significa 2 metros num segundo ou $\frac{2 \text{ metros}}{1 \text{ segundo}}$. Esta informação é a mesma da que obtemos quando temos 1 segundo para 2 metros ou $\frac{2 \text{ metros}}{1 \text{ segundo}}$. As duas razões são duais, mas são razões diferentes. Na primeira lê-se que a velocidade é 2m/s e na segunda que gasto $\frac{1}{2}$ segundos para percorrer 1 metro. Já a razão $\frac{2 \text{ metros}}{1 \text{ segundo}}$ não é a mesma que $\frac{1 \text{ metro}}{2 \text{ segundos}}$. A relação $\frac{1 \text{ metro}}{2 \text{ segundos}}$ significa que se percorre $\frac{1}{2}$ metro por segundo.

Os assuntos são complexos e só se interiorizam se se trabalharem os significados nas várias disciplinas e em contextos diferentes. Por isso, na oficina de formação defendemos que não se podem manipular apenas números e é necessário ‘falar’ com as expressões, dando-lhes significado.

Rapidez e velocidade

A rapidez média é uma grandeza escalar não negativa ($r_m = \frac{d}{\Delta t}$, sendo $\Delta t = t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}$), pois a distância percorrida também é uma grandeza escalar sempre positiva ou nula. A velocidade é uma grandeza vetorial ($\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$), caracterizada por uma intensidade valor, direção e sentido.

Nos gráficos de posição-tempo que apresentam etapas em que o movimento é uniforme, em cada etapa, calcula-se o declive (constante) e está a calcular-se a variação da posição do objeto nesse intervalo de tempo, que corresponde à distância percorrida, logo a rapidez média coincide com a velocidade. Isso permite-nos responder, no caso da tarefa da figura 7, a perguntas do tipo: Em qual das etapas o António andou mais rápido, ou seja, quando é que a rapidez foi maior? Onde aparece a velocidade no gráfico? Entre os pontos (0,0) (casa) e o ponto (50,100), o declive do segmento de reta, dá a velocidade.

$$\text{Declive} = \frac{\text{variação da distância (metros)}}{\text{variação do tempo (segundos)}} = \frac{100-0}{50-0} = 2 \text{ m/s};$$

$$\text{Declive} = \frac{\text{variação da distância}}{\text{variação do tempo}} = \frac{40-100}{70-50} = -3 \text{ m/s. Qual é o significado}$$

físico de um declive negativo? Neste problema, a velocidade média no primeiro troço foi de 2m/s e no segundo troço de -3m/s, o que significa que viajou com uma rapidez de 3m/s no sentido oposto do inicial. O módulo de uma variação da posição negativa é igual a uma distância percorrida nesse intervalo de tempo e, assim, rapidez média, velocidade média e a velocidade coincidem em valor nesse intervalo.

Quando comparamos a rapidez em cada etapa estamos a olhar para os valores absolutos das razões: 2m/s e 3m/s, logo a rapidez é maior na 2.ª etapa.

Dificuldades usuais: Média e velocidade média e cálculo de declives

Uma das dificuldades prende-se com o termo média. Quando usamos o termo velocidade média, isso significa que está distribuída proporcionalmente, não se refere a uma média aritmética. Ou seja, não é equivalente à média das velocidades nas respetivas etapas da viagem. Velocidade média é a distância total percorrida comparada com o tempo total necessário para percorrer essa distância. De outro modo, é a velocidade a que teria viajado se tivesse percorrido a mesma distância na mesma quantidade de tempo, a uma velocidade constante. Se se pedisse a velocidade média do percurso do António, era possível que alguns alunos calculassem a velocidade média adicionando as velocidades das etapas do percurso, dividindo o resultado pelo número de etapas, como fazem no caso do cálculo da média das idades. É necessário compreender que as idades são números inteiros, mas a velocidade envolve a comparação de duas grandezas e que para encontrar a velocidade média, o tempo de cada etapa de uma viagem tem que ser levado em conta.

O cálculo dos declives também apresenta dificuldades aos alunos, como salienta um dos professores, nas conclusões da tarefa da figura 11, explicando que a dificuldade estava “em associar o quociente entre as diferenças das ordenadas e das abcissas, sobretudo no início da tarefa retas declives..., onde frequentemente trocavam os termos da razão ou dividiam apenas a ordenada de um ponto pela abcissa correspondente”.

Relativamente aos gráficos de posição-tempo para movimentos retilíneos, nalguns manuais de física e química encontram-se apenas gráficos de posição sem inversão de sentido e noutros com inversão. A distinção entre gráficos de posição e distância percorrida pode ser trabalhada com ganho para os alunos, pedindo a transformação de gráficos de posição tempo em gráficos de distância percorrida e de velocidade, como na situação que se apresenta.

No caso apresentado na figura 7, para calcular a rapidez média (considerando apenas o intervalo em que o António esteve em movimento) tem de se considerar a distância total percorrida, de 280 (100 + 60 + 120) metros, sendo 2,8 m/s [$r_m = \frac{280 \text{ metros}}{100 \text{ segundos}}$]. Neste exemplo, o deslocamento foi de 160 metros e diz o quão

⁷ As unidades do Sistema Internacional para a velocidade são m/s.

distante está a paragem do autocarro da casa do António. Quando os alunos constroem o gráfico de distância percorrida/tempo (figura 13), apercebem-se que é crescente em sentido lato, apesar do gráfico de posição/tempo não o ser, o que contribui para a compreensão de que a distância percorrida nunca é negativa.

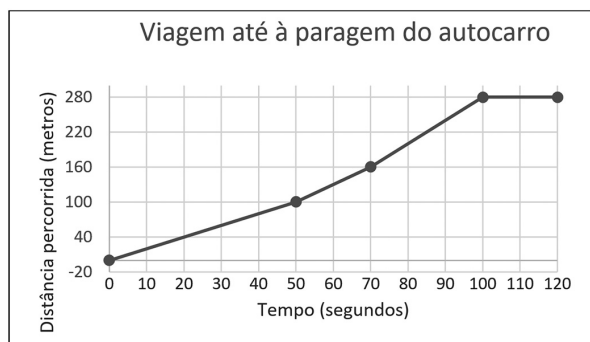


Figura 13. Gráfico de distância percorrida em função do tempo

Razões e Taxas

A juntar à complexidade do assunto e da linguagem, acresce que a velocidade é uma taxa unitária. Taxa é um termo utilizado no dia a dia e em várias disciplinas: a taxa de natalidade de um país é 12,4; A taxa de desemprego é de 3,4% ou a taxa de inflação é de 4,6%. Taxa pode ser pensada como uma extensão da razão, uma razão que não se aplica apenas a uma situação, como a comparação entre o número de rapazes e raparigas de uma turma, mas a um conjunto de situações em que as duas grandezas estão relacionadas da mesma forma. A velocidade é uma taxa unitária, pois é o valor que se obtém dividindo uma quantidade (variação da posição) pela unidade de outra quantidade (tempo). No exemplo dado na figura 8, o aluno descreveu a velocidade para uma etapa como a distância percorrida no tempo gasto, como “20 metros em 10 segundos”, pelo que a pergunta do professor foi “Podes escrever a velocidade como metros por segundo?”

CONCLUSÃO

Ao longo do ano letivo 2018/19 procurámos, a partir da identificação de fraquezas na aprendizagem dos alunos, planear e realizar algumas mudanças no ensino da matemática. O trabalho baseou-se em compromissos escolares relativos a: (A) *Plano de formação*, que contou com os recursos internos do Agrupamento, incluindo recursos físicos e horas da componente não letiva do meu horário para o trabalho de formadora; (B) *Curriculo*, compromisso entre os professores que os alunos encontrarão durante os 12 anos, que permitiu, no caso dos assuntos trabalhados neste texto recomendar que se mantenham os rótulos ligados aos valores que constituem a razão e a não lecionação da regra de 3 simples; (C) *prática letiva*, com trabalho colaborativo na preparação das tarefas e realização na sala de aula, com reflexão sobre os resultados.

Para mudanças firmes na forma como os alunos aprendem é necessário um trabalho continuado, que implique compromissos

como os enunciados. Para desenvolver projetos interdisciplinares são necessários mais compromissos, que me atrevo enunciar: formação contínua em grupos interdisciplinares, reforço das ligações entre os currículos de duas ou mais disciplinas e articulação nas práticas letivas.

Referências

- Caraça, B. J. (1970). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Fotogravura Nacional, Lda
- Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Swan, Malcon (2017/2108). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, 144/145, 67–72 e 146, 8–14.

MANUELA PIRES

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MARINHA GRANDE POENTE

Nota: agradeço ao colega de física e química do meu Agrupamento, Armando Severino, a disponibilidade para a discussão constante de conceitos.

CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS



O Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, na sua 16.ª edição (CNJM16), volta a Aveiro. A final decorrerá no dia 20 de março de 2020 na Universidade de Aveiro. A organização local é assegurada pela Fábrica Centro Ciência Viva de Aveiro, pelo Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e pelo Projeto Matemática Ensino (PmatE).

Esta iniciativa é promovida, desde 2004, por Associação Ludus, Associação de Professores de Matemática, Sociedade Portuguesa de Matemática e Agência Ciência Viva.

Aqui fica o desafio à participação das escolas.