Um triângulo e três circunferências

Consideremos a família de triângulos PQR que têm 20 centímetros de perímetro.

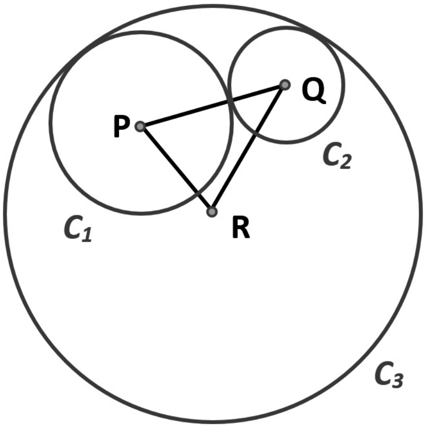
Traçam-se três circunferências:

C_1 com centro em P,
C_2 com centro em Q,
C_3 com centro em R,

de tal modo que:

– C_1 e C_2 sejam tangentes exteriormente entre si,
– C_1 e C_2 sejam tangentes interiormente a C_3.

Entre que valores pode variar o raio de C_3?



(Respostas até 31 de dezembro, para zepaulo46@gmail.com)

O TERRENO DA LETÍCIA

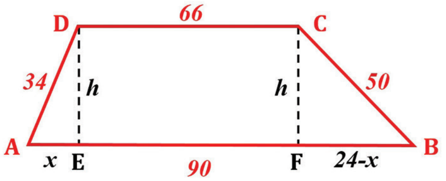
O problema proposto no número 151 da *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A Letícia herdou um terreno com a forma de um trapézio.
Os lados paralelos do trapézio medem 66 e 90 metros.
Os outros dois lados têm 34 e 50 metros de comprimento.
Qual é a área do terreno?

Recebemos 15 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Débora Alves, Francisco Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helder Martins (Lisboa), Ilca Cruz, Isabel Torres (Lisboa), José Carlos Frias (Lisboa), Letícia Martins (Guimarães), Luís Bernardino, Mário Roque (Guimarães), Regina Veríssimo (Paião) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

A abordagem inicial ao problema foi praticamente igual em quase todas as resoluções. Veja-se, por exemplo, a da Regina.

Comecei por fazer um esquema do trapézio, com os dados do enunciado.



[Considerando os triângulos retângulos da figura obtemos] o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 34^2 \\ (24-x)^2 + h^2 = 50^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ h = 30 \end{cases} \; ou \; \begin{cases} x = -16 \\ h = -30 \end{cases}$$

Mas, para a altura positiva h=30, o valor de x é negativo… Muitos comentários foram feitos para ultrapassar esta impossibilidade.

Graça: *A primeira dificuldade que me surgiu foi que, obviamente, utilizei uma figura como a do enunciado e o problema era impossível. Conclusão: a configuração do trapézio não é a "clássica".*

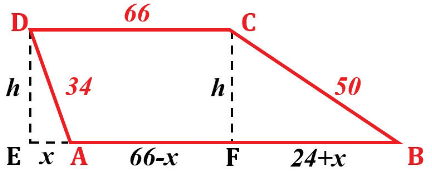
Isabel: *Ah? Mas, x=-16 não é possível! Não me apercebi e ficou para mais tarde. (…) Voltei ao Geogebra e desenhei o terreno. Surpresa!!!*

Regina: *Para melhor compreender o valor negativo obtido para x, comecei por construir [no Geogebra] o trapézio com os dados do enunciado. Fui movendo o ponto C até obter a base menor igual a 66.*

Alberto: *Aparentemente o problema é de fácil resolução. (…) Resolvendo o sistema concluímos que x = -16, o que é manifestamente impossível. Portanto o terreno nunca poderá ter a forma indicada na imagem. Analisando estes resultados, o valor negativo de x é fortemente indicativo de que o triângulo ADE terá de ser simétrico do representado na figura.*

Letícia: *O valor obtido é negativo. Isso significa que se assumiu uma forma errada do terreno.*

Realmente, o trapézio terá de ter outro aspeto.



A partir dos triângulos retângulos DEA e CFB, temos este sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 34^2 \\ (24+x)^2 + h^2 = 50^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ h = 30 \end{cases}$$

Agora, já tudo faz sentido.

A altura do trapézio é 30 metros. Então:

$$A_{trapézio} = \frac{90+66}{2} \times 30 = 2340\, m^2$$

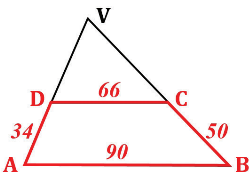
A área do terreno da Letícia é de 2340 m^2.

O José Carlos começou por não especificar os dados numéricos do problema:

Resolvi um sistema de 3 equações para um caso geral (em vez de usar as medidas 66, 90, 34 e 50), obtendo uma fórmula para a altura do trapézio (e duas outras para as medidas de comprimento das bases dos triângulos). Depois de concretizar [com os dados do problema], para minha surpresa, encontrei um valor "muito grande" (40) para uma das "bases" e um valor negativo (-16) para a outra.

Finalmente, o Mário adotou uma estratégia bem diferente.

Sendo [ABCD] o paralelogramo da Letícia, se prolongarmos os seus lados laterais, obtemos um triângulo [VBA] semelhante a [VCD].



Recorrendo a essa semelhança podemos determinar os comprimentos de [VD] e de [VC].

Como $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{90}{66} = \frac{15}{11}$ *então:*

$$\frac{\overline{VD}}{\overline{VD}+34} = \frac{15}{11} \Leftrightarrow \overline{VD} = 93,5 \text{ e } \frac{\overline{VC}}{\overline{VC}+50} = \frac{15}{11} \Leftrightarrow \overline{VC} = 137,5$$

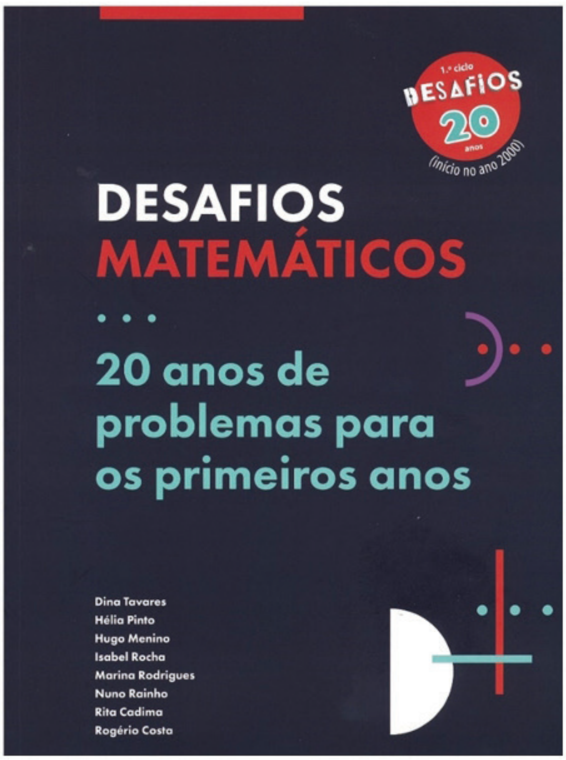
Ficamos assim a conhecer as medidas dos lados do triângulo [VBA] e também a sua área. Aplicando, por exemplo, a fórmula de Heron (o semiperímetro deste triângulo é igual a 202,5), teremos:

$$A_{AVD} = \sqrt{202,5 \times (202,5-90) \times (202,5-187,5) \times (202,5-127,5)} = 5062,5$$

Podemos utilizar o mesmo processo para determinar a área do triângulo [VCD], mas sabemos que, devido à já referida semelhança entre triângulos, esta será dada por $\left(\frac{11}{15}\right)^2 \times 5062,5 = 2722,5$.

Assim, a área do paralelogramo [ABCD] é igual a 5062,5 – 2722,5 = 2340 m^2.

PUBLICAÇÕES



O livro "**Desafios Matemáticos. 20 anos de problemas para os primeiros anos**" constitui um testemunho do concurso Desafios 2000, uma competição que nasceu no Ano Mundial da Matemática, numa organização conjunta do Politécnico de Leiria e do núcleo da APM daquela cidade, e que ganhou tradição junto das escolas, professores e alunos do 1.º ciclo, tendo sido alargado mais recentemente ao 2.º ciclo.

Este livro é composto por sete capítulos. Os dois capítulos iniciais focam-se na importância de três capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio e comunicação – e na relevância das competições no ensino e aprendizagem da matemática. Os restantes cinco são dedicados aos temas Números e Operações, Geometria e Medida, Organização e Tratamento de Dados, Álgebra e Conexões matemáticas. Nestes capítulos, além da compilação de problemas, existe uma introdução sobre as ideias centrais da resolução de problemas em cada tema.

Número de páginas: 120
Autores: Vários
Editora: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Politécnico de Leiria
Preço de sócio: 12 €