



## Para este número seleccionámos

### A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças

E. Yackel, P. Cobb, T. Wood, G. Wheatley, G. Merkel

*Este artigo, extraído do livro "Teaching and Learning Mathematics in the 1990s - 1990 Yearbook", publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics, foi dado a conhecer, no Profmat 90, aos professores que estiveram presentes no Grupo de Discussão: "Matemática no 1º ciclo do Ensino Básico".*

*Parece-nos importante a sua divulgação, porque ele põe em relevo as possíveis atitudes que o professor e os alunos devem ter numa sala de aula, para que, de facto, se processe a aprendizagem da Matemática.*

Quando as crianças aprendem matemática na escola fazem-no na sala de aula onde certas normas de conduta estão estabelecidas implícita ou explicitamente. Estas normas influenciam a forma como as crianças interagem com o professor e com os colegas, o que, por sua vez, influencia quer a Matemática que as crianças aprendem e como a aprendem. Neste artigo discutiremos uma abordagem pedagógica na qual é dada atenção explícita ao papel da interacção social na aprendizagem da matemática pelas crianças. Esta abordagem reflecte a perspectiva, segundo a qual, a aprendizagem da matemática é um processo activo de resolução de problemas. Quando são dadas às crianças oportunidades de conversar acerca da sua compreensão da matemática, surgem problemas genuínos de comunicação. Estes problemas, assim como as próprias tarefas matemáticas, constituem oportunidades para aprender matemática. A abordagem que discutiremos é coerente com as exigências actuais de reforma em educação matemática (National Research Council, 1989), com os princípios que

levaram ao desenvolvimento dos *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989), e com os princípios do construtivismo como teoria de aprendizagem (Confrey, 1987; von Glasersfeld, 1984). (...)

Este artigo foca três aspectos da abordagem pedagógica: primeiro, a construção pelas crianças dos seus próprios métodos não standards; segundo, aprendizagem da matemática como actividade de resolução de problemas e finalmente, o papel da interacção social na aprendizagem da matemática. Os dois primeiros aspectos fornecem-nos uma base de reflexão para a discussão do terceiro.

#### **As crianças constroem a sua própria matemática**

Quando são apresentadas às crianças tarefas que fazem sentido para elas, encorajando-as a resolvê-las, as crianças em vez de seguirem procedimentos que tenham sido apresentados pelo professor, desenvolvem uma variedade de

estratégias para alcançarem a solução. No início do ano lectivo, as crianças arranjaram os seguintes estratégias para  $9+11=$  \_\_\_ :

*Bárbara:* 9 e 9 são 18, mais 2 são 20.

*Adão:* 7 e 7 são 14, portanto 8 e 8 são 16, 9 e 9 seria 18 assim 9+11 deve ser igual a 20.

*Cristina:* 11 e 11 igual a 22. 10 e 11 igual a 21. 9 e 11 igual a 20.

*Joana:* 11 e 9 mais — 12, 13, ..., 18, 19, 20

Como ilustram estes exemplos, numa situação desafiante, as crianças utilizam os conhecimentos que já têm para desenvolver raciocínios com significado pessoal. As suas soluções reflectem as diferenças do conhecimento actual a que recorrem para solucionar a tarefa.

Afirmamos que, as crianças não só são capazes de desenvolver as suas próprias estratégias para realizar as tarefas da matemática escolar, mas também que cada criança tem de construir o seu próprio conhecimento matemático. Isto é, segundo o nosso ponto de vista, o conhecimento matemático não pode ser *dado* às crianças. Pelo contrário, elas

desenvolvem conceitos matemáticos quando se entregam a actividades matemáticas, incluindo a apreensão de “métodos” e explicações que vêm ou ouvem de outros. Este ponto de vista implica que na escola sejam proporcionadas às crianças actividades adequadas ao desenvolvimento de problemas matemáticos genuínos. Estes problemas dão-lhes oportunidade para reflectir e reorganizar as suas formas de pensar. De acordo com o que fica dito, desenvolvemos actividades que foram concebidas para encorajar a construção de conceitos e procedimentos relativamente sofisticados pelas crianças, tais como o valor de posição e os algoritmos de cálculo.

As quatro soluções para  $39 + 53 = \underline{\quad}$  ilustram a natureza conceptual de algoritmos alternativos das crianças:

*Ana:* 50 mais 30  $\underline{\quad}$  80, então 9 mais 1 seria 90, mais 2 seria 92.

*Joel:* Tens 53, mais 10 é 63, mais 10  $\underline{\quad}$  73, mais 10  $\underline{\quad}$  83, mais 9 ... 92.

*Joana:* Deixa ver, 39 mais 50 é 89, depois junta 3 faz 92.

*Eurico:* 30 mais 50 são 80 e 9 mais 3 são 12. Ponho tudo isto junto e obtenho 92.

Uma tão grande variedade de algoritmos desenvolvidos pelas crianças, quando estas se envolvem em raciocínios significativos, contrasta com a aplicação cega de regras que vemos frequentemente a serem utilizadas pelos alunos que foram treinados na utilização de um algoritmo particular. É a diferença entre “O que é que me disseram que eu deveria fazer?” e “Como posso imaginar isto?”. Uma consequência importante da nossa abordagem, é que alguns tipos de erros que habitualmente acompanham o uso dos algoritmos tradicionalmente ensinados e que frequentemente resultam em respostas não razoáveis (e. g.,  $39 + 53 = 812$ ), raramente ocorrem, pois as crianças estão a utilizar “métodos” baseados na sua compreensão. A nossa experiência diz-nos que a compreensão pelas crianças do valor de posição se desenvolve ao mesmo tempo que a sua construção da eficácia crescente dos algoritmos. Concordamos com Brownell (1956) que compreensão conceptual e proficiência

no cálculo, ou significado e prática, como ele a descreveu, não devem ser vistos como objectivos pedagógicos distintos (Cobb, Yakel, e Wood, 1988).

### Aprendizagem como uma actividade de resolução de problemas

A característica principal de uma abordagem pedagógica, baseada numa visão construtivista da aprendizagem, são as actividades propostas que devem dar origem a problemas para os alunos resolverem. Contudo, as situações que as crianças acham problemáticas distinguem-se devido às diferenças dos seus conhecimentos, experiências e objectivos. À primeira vista, isto pode parecer uma limitação, por não podermos garantir que todas as crianças pensarão, acerca duma mesma tarefa, da mesma forma. De facto, torna-se uma vantagem, isto é, um meio de individualização. As crianças em diferentes níveis conceptuais não só utilizam diferentes estratégias de solução como interpretam as tarefas de diferentes formas. Em resumo, cada criança tenta resolver problemas que façam sentido para o seu nível de compreensão e desenvolvimento conceptual. É neste sentido que dizemos que os professores não podem dar problemas aos alunos “prontos a fazer”. Os professores podem dar actividades pedagógicas. A estratégia de resolução dos problemas diferirá de criança para criança. O exemplo que se segue comprova-o:

Bruno tem todo este dinheiro. Compra um lápis por 7 escudos e um choco-

late por 35 escudos.

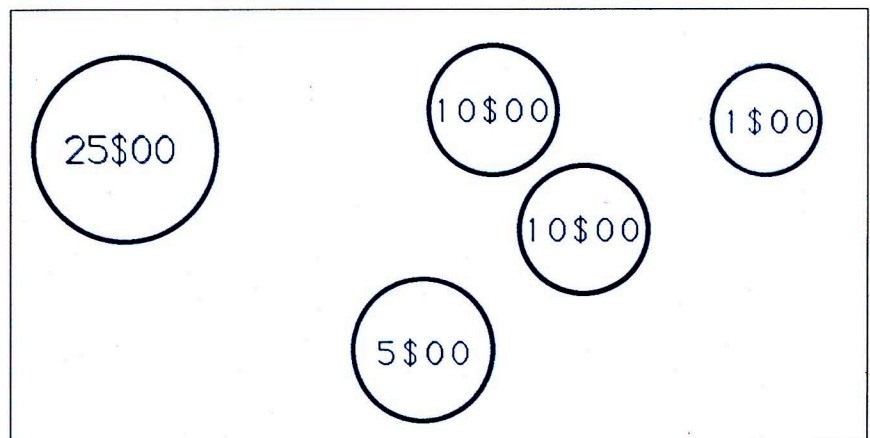
Com quanto dinheiro fica?

A solução do Luís é retirar a moeda de 25 escudos e a de 10 escudos para o chocolate (indicando com um traço no desenho) e retirar depois os 5 escudos, a moeda de um escudo e por fim um escudo dos 10 (a outra moeda de 10 escudos) para o lápis e dar como resposta 9 escudos. Adão, contudo, resolveu o problema como se segue:

Juntei-as todas e obtive 51, depois tirei 35. (Depois, subtraí 7).

Adão conceptualizou a tarefa como um problema de adição e subtracção simbólica. Luís, pelo contrário, considerou uma situação do mundo real e usou o valor das moedas. Como Adão, ele envolveu-se em cálculo mental, mas o seu problema era retirar moedas que igualavam o valor dos objectos adquiridos e portanto encontrar o valor das moedas restantes. As duas crianças envolveram-se em actividade matemática significativa na mesma tarefa, apesar das diferenças no seu conhecimento conceptual.

Resolver problemas envolve muitas vezes mais do que realizar as actividades propostas. Pode incluir também o aparecimento de resultados surpreendentes, tais como quando duas estratégias alternativas conduzem ao mesmo resultado, a justificação de um método de solução, ou a explicação de como um método aparentemente errado conduz a uma contradição. Quando o ensino na sala de aula é organizado de forma a que as crianças trabalhem cooperativamente nas actividades pedagógicas, situações como estas ocorrem frequentemente. A seguir discutiremos o



papel da interacção social na aprendizagem.

## **Aprendizagem através da interacção social**

Vamos primeiro descrever a abordagem pedagógica e depois ilustrar interacções típicas professor-aluno e aluno-aluno.

### **A Abordagem Pedagógica**

As actividades pedagógicas são de dois tipos: actividades propostas pelo professor para toda a classe e actividades de pequeno grupo. Numa aula típica de cinquenta minutos, a primeira metade é dedicada à resolução de problemas em pequeno grupo e a segunda metade a uma discussão da turma na qual os alunos explicam como resolveram as actividades. Na introdução das actividades limitamo-nos a certificar que as crianças compreendem a sua intenção e conhecem os símbolos utilizados. Não incluímos qualquer explicação ou demonstração pelo professor de como resolver as actividades. Durante o trabalho em pequeno grupo espera-se que cooperativamente, as crianças, trabalhando em pares, desenvolvam soluções para as actividades. Entretanto o professor circula entre os grupos observando e intervindo nos seus esforços de resolução do problema.

Na discussão subsequente na classe, as crianças explicam como resolveram as actividades. O professor ajuda as crianças a clarificarem as suas explicações, apoia-as quando elas verbalizam o seu pensamento e encoraja-as a apresentarem soluções alternativas. O professor não diz às crianças se as suas repostas estão correctas ou incorrectas, mas incita todas a reflectirem nas soluções apresentadas e a concordar ou discordar. Quando as crianças discordam, a classe trabalha como um todo para resolver o desacordo e chegar a um consenso. Alguns problemas permanecem não resolvidos por vários dias, durante os quais as crianças podem ser vistas muitas vezes tendo grandes discussões, durante os intervalos ou à hora do almoço. No fim da discussão na classe, o professor recolhe as

páginas das actividades das crianças, data-as, e coloca-as nas capas individuais dos alunos, as quais são mandadas para casa periodicamente.

As actividades apresentadas seguem uma série de formatos, mas são todas concebidas de modo a facilitar a ocorrência de problemas de matemática para as crianças resolverem. Modelos detalhados da aprendizagem inicial do número, feita pelas crianças, foram usados no desenvolvimento das actividades.

### **Interacção Professor-Aluno**

A atitude do professor é crucial para o desenvolvimento duma atmosfera de resolução de problemas na sala de aula. Com vista a que as crianças partilhem os seus pensamentos matemáticos, devem comunicar activamente entre si e com o professor. Comunicação com sucesso exige a negociação de intenções e “depende de todos os elementos da classe expressarem respeito e apoio pelas ideias uns dos outros”. Em relação à abordagem aqui defendida, pode dizer-se que, cada vez que uma criança quer fazer um comentário na discussão da classe, o professor assume que a actividade matemática que a criança está a tentar descrever é significativa para essa criança. Torna-se responsabilidade do professor tentar imaginar o que a criança quer dizer e, se necessário, apoiar a criança na verbalização desse significado. A importância das tentativas do professor para atribuir significado é ilustrada com o seguinte exemplo.

Numa aula do início de Dezembro, a classe estava a trabalhar numa actividade em grande grupo, na qual o professor pediu às crianças para tentarem imaginar a resposta a  $9 + 9 + 9$  sem contarem. A primeira criança a dizer a solução juntou 10 mais 10 mais 10 e depois subtraiu três uns para obter 27. A solução seguinte foi dada por Miguel:

Eu mudei um 9 para um 10 e um 9 para um 17 e depois deitei fora um 9 e obtive 27.

Em vez de tratar isto como uma confusa manipulação de números, o professor assumiu que Miguel estava a comunicar pensamento significativo.

Primeiro ele assinalou esta hipótese com os seus comentários e depois procedeu para tentar imaginar o que o Miguel pode ter estado a tentar dizer:

*Professor:* Ouviste isto, Joana? Deixa isso - está bem, agora escuta. Posso necessitar da tua ajuda. (Para o Miguel) Quero que digas novamente. Disseste que pegavas num 9 e transformava-lo num 10.

*Miguel:* E eu tirei 9 - tirei sete... - e mudei o segundo 9 para um 17.

*Professor:* Mudaste este (apontando para o segundo 9) para um 17.

*Miguel:* E mudei o último 9 para um igual e depois veio 27.

Aqui novamente o professor pode assumir que o Miguel não sabe acerca do que ele está a falar. Contudo, continua a assumir que o que ele fez tem sentido para ele, e tenta ajudá-lo a desenvolver uma explicação que possa fazer sentido para as outras crianças.

*Professor:* (para a classe) Vejam como ele fez?

*Adão:* Ele deitou-o fora - o último 9 e pô-lo nesse (o primeiro 9).

Juntou esse 8 ao 9 e obteve 17.

*Professor:* Vamos dar uma olhadela a esta parte (apontando para os últimos dois 9). Quanto é  $9+9$ ?

*Alunos:* (em uníssonos) 18.

*Professor:* 18. Está bem. Ele sabia que  $9 + 9$  são 18. Está bem. Ele sabia isso. Agora, ele retirou 1 de 18 e o que nos dá?

*Alunos:* (em uníssonos) 17.

*Professor:* 17, e ele pegou no 1 que tinha tirado daqui (tirado do 17) e juntou-o a este 9 (o primeiro 9) e fez dez. Essa foi uma forma de pensar.

Embora seja impossível para nós dizer se a solução que o professor desenvolveu é a que o Miguel tinha em mente, a continuação da sua discussão com ele teve vários efeitos positivos. Primeiro, o professor deu a perceber às crianças que as suas soluções delas fazem sentido para ele. Segundo, Miguel e as outras crianças da aula confirmaram mais uma vez que o professor os ajudaria quando eles tentassem verbalizar as suas tentativas de solução. Finalmente, toda a classe teve a vantagem de poder pensar, seguindo outro “método” de resolução.

Quando uma criança dá uma resposta incorrecta, é especialmente importante para o professor assumir que a criança esteve envolvida em actividade significativa. Assim é possível que a criança reflita na sua tentativa de solução e a avalie. Neste projecto quando uma criança dá uma resposta incorrecta, é comum que, sem auxílio, ela encontre o erro no decurso da explicação da solução. Uma criança disse em tal situação: "Agora discordo da minha resposta". Ao permitir que uma criança prossiga com uma explicação mesmo quando a resposta é errada, o professor mostra que ele não é a única autoridade na aula a quem as crianças têm de perguntar se a sua resposta é certa ou errada. As crianças são capazes de tomar essas decisões por si mesmas. A autoridade matemática não reside só no professor, mas no professor e nas crianças como uma comunidade intelectual.

Não só o professor assume que o que as crianças estão a dizer e a fazer faz sentido para elas, como também espera que as crianças estabeleçam essa hipótese acerca umas das outras. Ele procura obrigá-las a dar sentido às tentativas de solução umas das outras. Isto aplica-se ao trabalho em pequeno grupo e às discussões de toda a classe. As observações de Adão, no exemplo anterior, indicam que logo no início da segunda classe, os alunos podem começar a aceitar esta obrigação. O seu papel na discussão na aula é escutar, reflectir sobre o que está a ser dito e tentar tirar partido, em termos da sua própria estrutura cognitiva. No exemplo, Adão pensa, aparentemente, que compreende o método de solução de Miguel. Ao entrar na discussão Adão tira benefícios para si, pois clarifica o seu próprio pensamento. Outras vezes as crianças podem fazer comentários como: "Não compreendo o que ela está a tentar dizer" ou "Oh, eu percebo como ele fez", realçando que os ouvintes estão a tentar compreender o que o orador está a dizer.

A postura do professor ao tentar imaginar que sentido as crianças estão a dar às actividades também se aplica à resolução de problemas em pequeno grupo. De facto, este é um dos princípios mais importantes que deve guiar a in-

tervenção do professor nos pequenos grupos. Quando aborda um pequeno grupo que está a trabalhar, a primeira responsabilidade do professor é tentar imaginar como as crianças estão a pensar sobre a sua tarefa. Só assim o professor se envolve numa discussão com elas. O seu papel nessas intervenções, assim como na discussão na aula, não é dizer às crianças se estão certas ou erradas ou conduzi-las a uma solução correcta, mas antes apoiá-las quando tentam desenvolver actividades matemáticas significativas. Isto significa que o professor deve decidir que tipo de apoio deve dar, e se algum é apropriado. Pode ser encorajar as crianças a trabalhar cooperativamente ou a escutar as explicações de outro. Pode ser pôr às crianças questões provocatórias ou entrar num diálogo socrático com elas. Pode ser ajudar uma delas a explicar o seu pensamento, ou pode ser facilitar um diálogo.

#### Interação Aluno-Aluno

As crianças envolvem-se em dois tipos de actividades para resolver problemas, quando trabalham juntas em pequenos grupos. Por um lado, tentam resolver os seus problemas de matemática; por outro, têm de resolver o problema de trabalhar produtivamente juntos. Na perspectiva dos professores, alunos ao trabalhar em pequenos grupos (1) devem cooperar para resolver os problemas e (2) devem chegar a um consenso. Estes dois deveres significam que as crianças devem explicar o seu pensamento uns aos outros, tentar compreender o pensamento do outro, assumir que as tentativas de solução do outro fazem sentido, e persistir, tentando imaginar coisas para si próprias.

As interações que têm lugar quando os problemas de cooperação social são temporariamente resolvidos dão origem a oportunidades de aprendizagem que não ocorrem em situações de sala de aula tradicional (Yakel, Loob e Wood), incluindo oportunidades para os alunos verbalizarem os seus pensamentos, explicarem ou justificarem as suas soluções e tirarem dúvidas. Tentativas para resolver conflitos dão origem a oportunidades

para as crianças reconceptualizarem um problema e alargarem a sua estrutura conceptual incorporando métodos de solução alternativos.

O seguinte exemplo mostra como duas crianças alargaram a sua estrutura conceptual quando tentaram resolver um conflito decorrente da adição

$$39 + 19 =$$

*Carlos:* (Usa um quadro de centenas e começa a contar em 40 no quadro) 40, 41, ..., 57, 58, 59. (Enquanto conta, não deixa visível nenhuma pista dos seus actos de contagem).

*Carina:* 39, 49. Esse é dez (apontando para o quadro das centenas. Continua contando pelos dedos começando em 50. Põe mais um dedo por cada número e pára quando tem nove dedos levantados.) 50, 51, ..., 57, 58.

No processo de tentar resolver o desacordo entre as suas respostas, cada criança repete a sua solução várias vezes. Finalmente Carina imagina a possível origem da dificuldade de Carlos.

*Carina:* Tu não estás mesmo a contar (significando deixar visíveis pistas da contagem). Vem aqui. Eu explico-te como obtive o meu número. Vês, tens 39 e juntas mais 10 e tens 49, 50, 51, ..., 58. (Desta vez Carina está a contar no quadro das centenas apontando nele o numeral com o seu lápis. Simultaneamente usa os dedos das suas duas mãos para indicar os actos de contagem. Pára quando os nove dedos estão levantados).

Aqui Carina reconceptualizou a sua própria solução à luz do método do Carlos e adaptou a sua explicação ao quadro das centenas como Carlos tinha feito. Ao fazer isso, teve de esboçar a sua própria compreensão para desenvolver uma estrutura dentro da qual existisse uma explicação que fizesse sentido para o Carlos. Ao longo do diálogo, Carlos alargou eventualmente a sua conceptualização individual quando as explicações de Carina fizeram sentido, e o conflito foi resolvido.

#### Conclusão

Discutimos uma abordagem pedagógica que se baseia na perspectiva de que a matemática é uma actividade

humana criativa e que a interação social na sala de aula desempenha um papel crucial quando as crianças aprendem Matemática. Tanto a interação professor-aluno como a que se processa entre os alunos influenciam o que é aprendido e como é aprendido. O professor toma um papel crucial ao conduzir o desenvolvimento do que Silver (1985) chamou uma atmosfera de resolução de problemas, um ambiente no qual as crianças se sentem livres para conversar acerca das suas matemáticas.

O papel do professor é indispensável também para que a regra da classe de que se deve ajudar sempre os colegas, não é secundária, mas sim um aspecto central do papel dos alunos (Slavin, 1985, p. 16). Desde que esta regra seja assumida, oportunidades para a aprendizagem, que não estão presentes no ensino tradicional, crescem na medida em que as crianças colaboram entre si na resolução de problemas.

A terminar, notamos que as crianças aprendem muito mais do que Matemática neste tipo - ou em qualquer tipo - de situações de sala de aula. Desenvolvem convicções sobre a Matemática e sobre o seu papel e o do professor. Além disso, um sentido do que é valorizado desenvolve-se com atitudes e formas de motivação. A abordagem aqui descrita foi elaborada de modo a valorizar concepções que fomentem a persistência e o desenvolvimento de estratégias pessoais na resolução de problemas estimulantes opondo-se a uma página cheia de respostas certas; concepções que valorizem mais actividades significativas são aquilo a que uma criança chamava "misturar um monte de números", e ainda opiniões que valorizem mais a cooperação e a negociação do que a competição e o conflito.

Acima de tudo a abordagem que encoraja os alunos a conversar acerca dos seus "métodos" de solução sem os avaliar pela sua correcção, é caracterizada pelo desenvolvimento de uma confiança mútua entre o professor e os alunos. O professor confia nos alunos e incita-os a tentarem resolver os seus problemas de Matemática e consequentemente sente-se livre para lhes pedir que descrevam o

seu pensamento. Os alunos confiam que o professor respeita os seus esforços e consequentemente entram nas discussões explicando como realmente compreenderam e tentaram resolver os seus problemas de Matemática.

## Referências

Barnes, Douglas, and Frankie Todd. *Communication and Learning in Small Groups*. London: Routedge & Kegan Paul, 1977.

Bishop, Alan. "The Social Construction of Meaning- a Significant Development for Mathematics Education?" *For the Learning of Mathematics* 5 (1) (1985): 24-28.

Brownell, William A. "Meaning and Skill: Maintaining the Balance." *Arithmetic Teacher* 3 (October 1956): 129-36.

Cobb, Paul, Terry Wood, and Erna Yackel. "Learning through Problem Solving: A Constructivist Approach to Second-Grade Mathematics." In *Constructivism in Mathematics Education*, edited by Ernst von Glaserfeld. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel, forthcoming.

Cobb, Paul, Erna Yachel, and Terry Wood. "Curriculum and Teacher Development: Psychological and Anthropological Perspectives." In *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics*, edited by Elizabeth Fennema, Thomas Carpenter, and Sue Lamon. Madison: Wisconsin Center for Education Research, 1988.

\_\_\_\_\_. "Young Children's Emotional Acts While Doing Mathematical Problem Solving." In *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective*, edited by Douglas B. McLeod and Verna M. Adams. New York: Springer-Verlag, 1989.

Confrey, Jere. "The Current State of Constructivist Thought in Mathematics Education". Paper presented at the annual meeting of the International Group for Psychology of Mathematics Education, Montreal, July 1987.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1989.

National Research Council. *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*. Washington, D.C.: National Academy Press, 1989.

Nicholls, John G., Paul Cobb, Terry Wood, Erna Yackel, and Michael Patashnick. "Dimensions of Success in Mathematics: Individual and Classroom Differences." *Journal for Research in Mathematics Education*,

in press.

Nicholls, John G., Paul Cobb, Terry Wood, Erna Yackel and Grayson Wheatley. "Assessing Young Children's Mathematical Learning." In *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics*, edited by Gerald Kulm. Washington D.C.: American Association for the Advancement of Science, forthcoming.

Silver, Eduard A. "Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some Underrepresented Themes and Needed Directions." In *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, edited by Edward A. Silver. pp. 247-66. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

Slavin, Robert. "An Introduction to Cooperative Learning Research." In *Learning to Cooperate, Cooperating to Learn*, edited by Robert Slavin, Shlomo Sharan, Spencer Kagan, Rachel Hertz-Lazarowitz, Clark Webb, and Richard Schmuck, pp. 5-15. New York: Plenum Press, 1985.

Steffe, Leslie P., Paul Cobb, and Ernst von Glaserfeld. *Young Children's Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. New York: Springer-Verlag, 1988.

Steffe, Leslie P., Ernst von Glaserfeld, John Richards, and Paul Cobb. *Children's Counting Types: Philosophy, Theory, and Application*. New York: Praeger Scientific, 1983.

Thompson, Patrick. "Experience, Problem Solving, and Learning Mathematics: Considerations in Developing Mathematics Curricula." In *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, edited by Edward A. Silver, pp. 189-236. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

von Glaserfeld, Ernst. "An Introduction to Radical Constructivism." In *The Invented Reality*, edited by Paul Watzlawick, pp. 17-40. New York: W.W. Norton & Co., 1984.

Wood, Terry, and Erna Yackel. "The Development of Collaborative Dialogue within Small-Group Interactions." In *Transforming Early Childhood Mathematics*, edited by Leslie P. Steffe and Terry Wood. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, forthcoming.

Yackel, Erna, Paul Cobb, and Terry Wood. "Small-Group Interactions as a Source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics." In *Cooperative Learning in Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, forthcoming.

Tradução de Lurdes Serrazina (E.S.E. de Lisboa) e Margarida Belchior (Projecto Minerva).