

# Matemáticas na Raia 2019

CLÁUDIA CAMPOS  
ORQUÍDEA SANTOS

Matemáticas na Raia é um concurso de resolução de problemas por turmas que se realiza na Galiza e na Região Norte de Portugal, organizado conjuntamente pela Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA) e a Associação de Professores de Matemática (APM) de Portugal. Este concurso tem caráter anual e participam turmas (completas ou com pelo menos 75% dos alunos da turma) do 9.º ano da região norte de Portugal e da Galiza. A prova consiste em resolver numa hora e meia cinco problemas, no mesmo dia à mesma hora e com o mesmo enunciado na Galiza e em Portugal. Os vencedores, jovens dos dois lados da fronteira, desfrutam de um fim-de-semana lúdico, em Tui ou no Norte de Portugal, em que realizam atividades lúdico-festivas, onde os alunos portugueses e galegos confraternizam, realizam passeios turísticos, competições diversificadas e amistosas partilhando conhecimentos e experiências.

Este ano realizou-se a quinta edição do concurso Matemáticas na Raia e o prémio foi atribuído, no fim-de-semana de 25 e 26 de maio, à turma A do 9.º ano da Escola Básica de Arões - Santa Cristina, Agrupamento de Escolas de Fafe.

## A FILOSOFIA DO CONCURSO

Os educadores cada vez mais procuram substituir o ensino tradicional assente na resolução de exercícios mecanizados por um ensino mais exploratório, mais prático e a participação no Concurso Matemáticas na Raia representa uma oportunidade para se aprender de forma diferente.

Numa sociedade em constante evolução pretende-se aproximar o ensino aos seus alunos e colocar o professor como orquestrador de saberes e já não tanto como transmissor ou o detentor do conhecimento. Stein, Engle, Smith e Hughes (citado por Baía, 2013) afirmam que o professor passou a ser engenheiro de ambientes de aprendizagem em que os alunos, através da resolução de problemas, constroem o seu próprio conhecimento.

A participação no concurso Matemáticas na Raia articula a resolução de problemas com o trabalho colaborativo do grupo e da turma. Na escola e dentro da sala de aula ainda se estimula, por vezes, os saberes individuais e existe competitividade entre alunos. O objetivo neste concurso é trabalhar de forma oposta, aceitando e aproveitando as diferenças dos intervenientes,

estimulando a qualidade e a criatividade de cada indivíduo dentro do grupo e promovendo atitudes mais favoráveis face à matemática.

Com este concurso, os alunos desenvolveram capacidades transversais tais como: liderança, cultura de liberdade, participação, reflexão, atitudes de responsabilização pessoal e social, valorização do debate como meio adequado à resolução de problemas, confrontação de ideias, apresentação de críticas, participação cívica e cooperação, que podem ser determinantes para a sua adaptabilidade e sucesso no ensino secundário, superior e/ou integração no mercado de trabalho.

Doyle (citado por Silva, 2012), afirma que as tarefas usadas na sala de aula são a base de toda a aprendizagem e aspetos como a seleção e a metodologia escolhida para a realização das tarefas, os ambientes de aprendizagem, a comunicação matemática na sala de aula e o modo como os alunos participam na aula de Matemática têm grandes implicações para a natureza do conhecimento que os alunos produzem.

Segundo Silva (2012), o insucesso na resolução de problemas por parte dos alunos decorre não só da falta de conhecimentos matemáticos, mas também do desconhecimento sobre como aplicar esses mesmos conhecimentos. Acrescenta que, o conhecimento de estratégias de resolução entre os vários elementos do grupo de trabalho constitui uma ajuda válida na organização do pensamento individual e, conseqüentemente, na procura da resolução e exploração dos problemas apresentados. Num contexto de matemática escolar, a resolução de problemas é um processo onde se combinam vários elementos, tais como: a organização de informação, o conhecimento de estratégias, as diferentes formas de representação, a tradução de linguagens, a aplicação de vários conhecimentos, a tomada de decisões e a interpretação da solução obtida. Segundo a autora, o ensino que envolve uma forte componente de resolução de problemas está a permitir formar alunos que analisem, dominem e controlem o seu conhecimento e adquiram algo novo.

Ao juntar-se a realização de problemas com a cooperação de todos os elementos da turma caminha-se no sentido de promover as *Soft Skills* tão procuradas pelos empregadores do século XXI: Resolução de Problemas Complexos; Pensamento Crítico; Criatividade; Gestão de Pessoas; Coordenação com Outros;

Inteligência Emocional; Tomada de Decisão; Orientação para Servir; Negociação e Flexibilidade Cognitiva.

Baía (2013) refere vários estudos realizados na área do ensino (Freeman; Johnson & Johnson; Slavin; Johnson et al.) que evidenciam que a aprendizagem cooperativa favorece consideravelmente a melhoria do rendimento escolar e o desenvolvimento de competências sociais dos alunos. O trabalho em grupo é visto como uma das estratégias de ensino que estimula a interação social, uma vez que promove a igualdade de oportunidades, a responsabilidade, a cooperação e autonomia em sincronia com os diferentes conteúdos programáticos (Aguado, citado por Baía, 2013).

Existem estudos que afirmam que o trabalho em grupo de estudantes promove competências essenciais. Por exemplo, Francisco (citado por Matias, 2015) concluiu que o trabalho cooperativo promove nos alunos uma melhor compreensão matemática e acredita que se os alunos trabalharem juntos, numa mesma ideia, aprendem mais. Segundo Colaço (citado por Damiani, 2008), os benefícios das atividades em grupo entre estudantes são essencialmente três: a socialização, o controlo de impulsos agressivos, a adaptação às normas estabelecidas e superação do egocentrismo; a aquisição de aptidões e habilidades e o aumento do nível de aspiração escolar.

No trabalho em grupo, os alunos avaliam a forma como argumentam e criam oportunidades de construir ideias mais sólidas baseadas nas ideias primárias dos seus colegas.

## **PARTICIPAÇÃO NO CONCURSO**

No início do ano, aquando da elaboração do Plano Anual de Atividades, são escolhidas as atividades em que a comunidade escolar participará. No ano que agora finda, no Agrupamento de Escolas de Fafe, o grupo disciplinar de matemática escolheu participar, tal como já tinha feito em anos anteriores, no Concurso Matemáticas na Raia. Porquê? Na escolha deste concurso, além dos aspetos anteriormente referidos, foi decisivo o facto de toda a turma participar. Tem a característica de se focar na realização de problemas que envolve todos os elementos de uma turma e não somente aqueles que habilmente o conseguem realizar e que já são conhecidos no meio escolar por essa destreza.

No Agrupamento de Escolas de Fafe participaram as três turmas do 9.º ano. Antes do dia de realização da prova, a professora titular de cada turma ajudou a formar grupos de 4 ou 5 elementos. Os grupos foram constituídos da seguinte forma: a professora escolhia quatro ou cinco elementos líderes da turma que depois, alternadamente, escolheriam os seus companheiros. Formavam-se grupos homogêneos, escolhidos pelos colegas entre si.

No dia da prova, cada turma estava numa sala preparada para o efeito e o professor, responsável por vigiar a turma, distribuía os problemas de forma aleatória pelos diferentes grupos. A sala

de aula foi organizada de forma a que os grupos se sentassem em volta das mesas e pudessem ler e discutir o problema e as suas possíveis abordagens, mas também olharem-se. Todos os elementos davam as suas opiniões que eram validadas pelo líder do grupo. Em cada grupo experimentaram-se vários caminhos para a resolução dos diferentes problemas, havendo a necessidade acrescida de gerir o tempo. Após a resolução do problema, os primeiros grupos a terminarem a sua resolução trocavam de forma a validarem as respostas dadas pelo grupo vizinho. No final, um aluno lia e aprovava todas as resoluções e dois alunos, escolhidos para o efeito, faziam a compilação das resoluções nas folhas brancas de forma organizada.

Durante a atividade, os alunos mostraram-se envolvidos, empenhados e entusiasmados, até porque a vitória seria uma viagem de sonho que gostariam de ter e não tiveram. Assim, este concurso representava também a oportunidade de sair em visita de estudo, por dois dias, com todos os alunos da turma, visita essa que sempre aspiraram a ter no 9.º ano e que este ano não se concretizou. Enquanto aguardavam os resultados do concurso, questionavam constantemente o professor responsável se já sabia dos resultados expansivamente.

Quando finalmente chegou a notícia de que a turma A tinha ganho o concurso foi uma loucura. Todos ficaram eufóricos, começaram cedo a fantasiar e a pensar no que levar para a viagem. Houve nitidamente uma turma antes e depois de vencerem o concurso. As aulas de matemática ganharam outro encanto, outra energia, outra predisposição para as aprendizagens e outra vontade de reprimir as fraquezas.

Finalmente chegou o fim-de-semana tão aguardado. Os alunos demonstraram uma abertura para participarem nas atividades planeadas e gostaram de trabalhar e de conviver com os colegas Galegos.

Nestas jornadas, realizaram diferentes atividades como: jogos desportivos, Gincana Matemática que incluiu um peddy-paper pelo centro histórico de Tui; jogos de estratégias com equipas mistas (portugueses e espanhóis); passeio turístico na fronteira entre Tui e Valença; um grandioso espetáculo de magia e a descida do rio Minho em caiaque.

Os vinte e dois jovens portugueses e os dezassete espanhóis apreciaram o convívio, partilharam saberes e construíram laços de amizade, sem dúvida uma mais-valia na formação cultural, histórica e matemática destes alunos.

## **ATIVIDADES REALIZADAS**

Do programa preparado pelos colegas do país vizinho, destacamos três atividades que nos chamaram a atenção: a construção das cúpulas de Leonardo, o Roteiro Matemático pela cidade de Tui e o Concurso de jogos matemáticos.

## A CÚPULA DE LEONARDO

A construção da cúpula é uma atividade baseada na proposta educacional desenvolvida pelo Museu de Matemáticas da Catalunha (MMACA). Segundo Enric Brasó, responsável do museu, as construções cujos elementos de suporte são mantidos com encaixes são atribuídas a Leonardo da Vinci e os primeiros esquemas dessas estruturas estão representadas nas páginas 899 e 890 do seu Codex Atlanticus. Geometricamente, essas estruturas são padrões planos. O Museu propõe uma experiência didática com a utilização de um material, o Leonardome (figura 1), material que os nossos alunos puderam experimentar (consultar <http://www.leonardome.com/es/>).

Utilizando apenas peças de 50 cm em madeira, todas de igual formato, podem-se construir diferentes modelos de cúpulas gigantes, com cerca de 3 a 4 metros de diâmetro, que se mantêm graças aos encaixes das peças umas nas outras.



Figura 1

Podemos idealizar as peças como segmentos iguais com 4 pontos de união equidistante. Esses pontos são de dois tipos: aqueles localizados nas extremidades, que o autor chama de “S”, pois estão localizados no topo; e os centrais, que chama de “I”, por estarem sempre na parte inferior das articulações. Nesses padrões os vértices nunca coincidem (figura 2). A curvatura da estrutura é alcançada pela diferente altura dos encaixes. Se os encaixes fossem colocados no mesmo nível, a estrutura seria absolutamente plana. Para levantar as cúpulas, também é necessário que os pontos S e I tenham uma margem de alguns milímetros. Segundo o autor, os polígonos lado a lado não são absolutamente regulares. Para o posicionamento dos segmentos, S-I-I-S, as extremidades do segmento repousam nos dois pontos centrais de outro segmento, como se pode verificar na imagem (figura 2). A construção de cúpulas é apenas uma das coisas que se podem fazer com estas peças.

As cúpulas feitas com os 9 padrões da figura têm pouca curvatura, deste modo a sua realização é viável. No entanto, eles não são extensíveis indefinidamente, uma vez que são figuras planas. As peças chegam a um momento e não se encaixam e, quando o posicionamento é forçado, por um lado, são libertados por outro. Para obter uma cúpula sem essas limitações, é necessário recorrer a mosaicos da superfície esférica.

Las estructuras autosostenibles de Leonardo

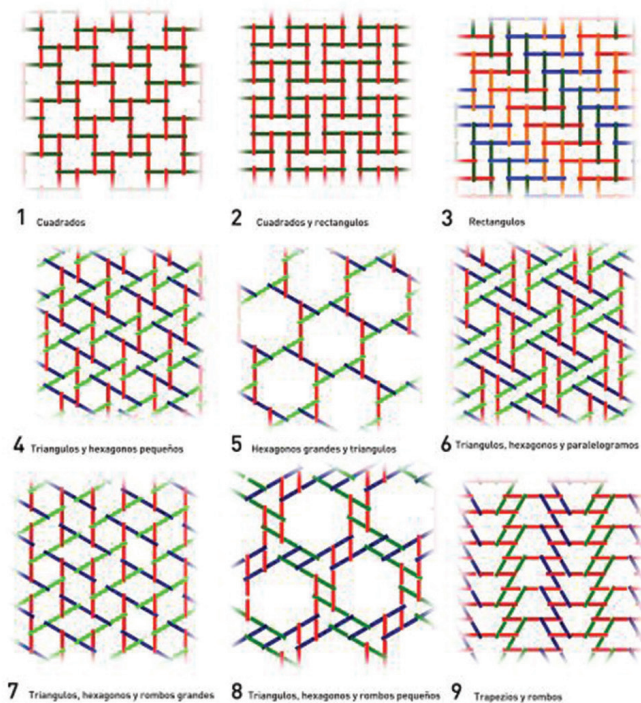


Figura 2

A construção desta estrutura representou um momento de trabalho cooperativo, de imaginação espacial e de construção de um padrão. Foi um bom exercício para praticar as habilidades espaciais e cooperativas e exigiu a coordenação de todos os participantes (figura 3).



Figura 3

## ROTEIRO MATEMÁTICO

Os alunos, agrupados em equipas, foram percorrer o centro histórico de Tui e ao mesmo tempo realizar atividades matemáticas partilhando saberes e experiências. Das atividades propostas, os alunos demonstraram bastante entusiasmo particularmente em duas: “Contar por estimativa o número de pedras que formam a muralha” e “Medir a altura da arcada da catedral com recurso a um espelho”. O material que tinham disponível para realizar a atividade era papel, lápis, borracha e uma fita métrica pequena.

Na primeira atividade, contar o número de pedras que formam a muralha (figura 4), os grupos de alunos, na sua maioria, optaram por medir a sua passada para assim encontrarem o comprimento da muralha.



Figura 4

Um aluno media a sua passada, contava o número de passos de uma extremidade à outra da muralha e multiplicava o número de passos pelo comprimento da sua passada. Descobrimos, dessa forma, o comprimento da muralha. Para a altura contaram por quantas filas era constituída a muralha, mediram uma pedra e multiplicaram o número de filas e a altura de uma pedra da muralha. Já tinham as medidas do comprimento e da altura da muralha, determinaram a área. Seguidamente, escolheram uma pedra modelo e determinaram a sua área. Depois de calcularem a área de uma pedra e a área do painel que representa a parede da muralha, dividiram e chegaram a um valor aproximado para o número de pedras que formam a muralha.

Houve um grupo que, para determinar a área da muralha, tentou utilizar a semelhança de triângulos, utilizando a medida do lápis (olhava pelo lápis e afastava-se da muralha até o seu lápis medir o comprimento da muralha) mas como havia inclinação do terreno, não prosseguiu com essa estratégia.

Na segunda atividade, medir a altura da arcada da catedral com recurso a um espelho (figura 5), os alunos não conheciam esse método e acharam muito divertido utilizarem a semelhança de triângulos para determinar alturas inacessíveis. O espelho estava

colocado no chão, um aluno do grupo tentava encontrar o vértice da arcada na imagem refletida no espelho os restantes alunos mediam a distância da arcada ao espelho e do espelho ao seu companheiro. Sabendo a altura do aluno escolhido, realizaram a proporção que lhes devolvia o resultado da medida desejada. Alguns grupos não utilizaram a unidade de comprimento correta, misturando centímetros e metros nas diferentes proporções, pelo que obtiveram resultados estranhos, os quais os deixavam a pensar na fiabilidade do método e não na obtenção errada das medidas e das unidades utilizadas.

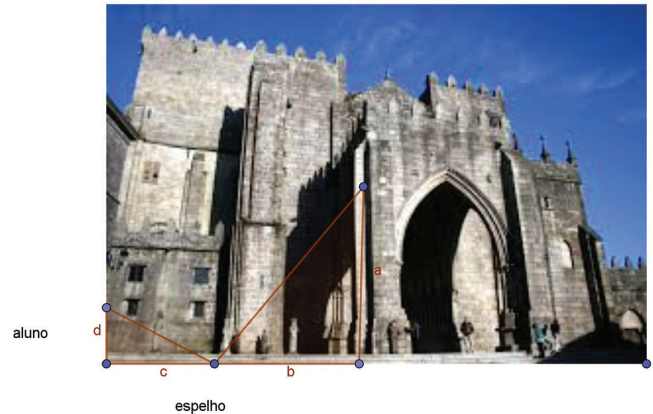


Figura 5

$$\frac{\text{altura da arcada}}{\text{altura do aluno}} = \frac{\text{distância da arcada ao espelho}}{\text{distância do espelho ao aluno}}$$



## CONCURSO DE JOGOS MATEMÁTICOS

Depois de um belo passeio pelo rio Minho, a tarde de domingo foi passada no concurso de jogos matemáticos. Cada equipa teria de passar em 10 bancas onde lhes eram propostos desafios como a construção de pentaminós, o Cubo Soma, Cubos Rodantes (De Fernando Corbalán), Cubos diabólicos, entre outras. Os participantes obtinham pontos se realizassem corretamente a atividade. No final, ganharia a equipa que somasse mais pontos. Também nestas atividades os alunos demonstraram muita motivação e espírito competitivo, empenhando-se por realizá-las corretamente (figura 6).



**Figura 6**

Este concurso marca pela diferença. Ficam aqui alguns testemunhos da visita.

“Aquele fim-de-semana será inesquecível. O que mais me marcou foi sem dúvida o contacto entre duas culturas diferentes. Tive, também, oportunidade de aprender a fazer canoagem, nunca tinha feito mas adorei. Estou grata a todos que contribuíram para fazer deste fim-de-semana o melhor da minha vida, nunca irei esquecer tudo aquilo que vivi.”

*Beatriz Lopes, nº3, 9ªA*

“Gostei do convívio com alunos de outro país, alguns simpáticos outros envergonhados, gostei da canoagem. Matemática turística foi espetacular, andar nos monumentos a calcular a altura dos seus arcos e o melhor foi as equipas serem mistas (alunos portugueses e espanhóis).”

*Miguel Teixeira, nº 17, 9ªA*

“Esta visita marcou sem dúvida a história da nossa turma. Nenhum ponto negativo me saltou à vista ao contrário dos positivos que foram milhares. Adorei a interação entre alunos de diferentes países e o ambiente em que estávamos. O que mais me marcou foi a oportunidade que me foi dada de fazer canoagem e de nadar em pleno rio, foi uma experiência que talvez nunca poderia ter feito. Este projeto foi ideal para nos chamar mais para o mundo matemático. Esta visita fez-me descobrir o quão divertido é a canoagem e descobrir também a cidade de Tui e a

linguagem galega. Tenho que dizer um grande obrigado a todos os envolvidos (principalmente aos que nos acompanharam), a todos os alunos espanhóis que adorei conhecer e à minha turma, que fez esta viagem valer a pena.”

*Beatriz Fernandes nº 2, 9ªA*

“Gostei muito da visita de estudo, o que mais gostei foi da canoagem foi uma coisa nova e divertida, acho que correu muito bem, o facto de juntar a matemática e os pontos turísticos da cidade. O local onde ficamos a dormir era muito acolhedor, confortável e a comida era boa. Foi muito engraçado com os espanhóis porque conhecemos gente nova.”

*Ana Valentina Silva, nº6, 9ªA*

### Referências

- Damiani, M. F. (2008). Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. *Educar em Revista*, 31, 213-230. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=155014216012>
- Matias, A. F. (2015). *A Comunicação Matemática Escrita no 10.º Ano de Escolaridade em Contexto de Trabalho de Grupo*. (Dissertação de Mestrado). Universidade de Lisboa. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/22535>
- Silva, A. (2012). *Congresso Matemático: Uma experiência com alunos do 6.º ano do Ensino Básico*. (Relatório Final de Prática de Ensino Supervisionada). Instituto Politécnico de Viana do Castelo. Disponível em: <http://hdl.handle.net/20.500.11960/1594>
- Baía, I. M. S. (2013). *Perceção dos Professores de Matemática do Ensino Básico Acerca do Trabalho de Grupo na Sala de Aula*. (Dissertação de Mestrado). Instituto Politécnico de Bragança. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10198/15929>

**CLÁUDIA CAMPOS**

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE FAFE

**ORQUÍDEA SANTOS**

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE FAFE

## MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

### Translações e rotações de Fez

Esta tarefa consiste numa pequena investigação acerca da existência da propriedade comutativa entre isometrias planas.

Tendo em conta os atuais documentos curriculares em vigor, esta destina-se a alunos do oitavo ano de escolaridade. Tem como pressuposto que os alunos já tenham estudado a translação associada a um vetor.

Sugere-se que a tarefa seja realizada em pequenos ou grandes grupos, tendo em conta os níveis de dificuldade e abertura que esta possui.

Além do mais, a tarefa é um bom ponto de partida para uma colaboração interdisciplinar entre as disciplinas de História, Geografia e Matemática, tendo em conta o contexto em que se insere (história cultural e territorial árabe).

Para a realização desta tarefa, recomenda-se a utilização de material de medida e desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor).

**JOÃO TERROSO**

ESCOLA BÁSICA 2/3 DE CAMÕES