

PREÂMBULO

O tema da indução matemática tem um grande valor formativo, que transcende a utilidade de que se reveste em numerosas situações concretas. Ao longo do tempo, os programas têm variado e o primeiro contacto com o tema já se deu por vezes ao nível do ensino secundário e outras vezes apenas ao nível do ensino universitário. Há que procurar que os alunos compreendam as ideias subjacentes, evitando uma espécie de *aprendizagem mecanizada*. Quem alguma vez tenha tido uma experiência de ensino relacionada com o tema, num ou noutra dos níveis, ter-se-á muito provavelmente confrontado com situações de alunos que *sabem* que quando há que resolver um problema de indução, é dada uma fórmula em que entra a letra n , e a regra para resolver um tal problema é: primeiro substitui-se n por 1 e depois por $n+1$, etc., mas que não têm a menor noção do raciocínio envolvido.

No texto que se segue, descreve-se uma forma de apresentação do raciocínio de *indução* (às vezes designada por *indução finita*, por razões adiante indicadas). Na primeira secção apresenta-se um *jogo das lâmpadas*, cuja resolução o leitor deverá procurar descobrir usando uma versão interactiva do jogo, criada pelo Atractor [1]. Com suficiente prática, o leitor vai adquirindo consciência do que há que fazer para alcançar o objectivo de tal jogo e, em particular, terá relacionado a resolução do jogo para uma fila de lâmpadas com a resolução do mesmo jogo para filas mais curtas. Terá aplicado num caso particular, eventualmente sem o saber, uma forma de raciocínio de indução, sem que na situação surja para prova qualquer fórmula dependente de um n .

Ressalvas:


1. Um texto publicado na revista Educação e Matemática terá como leitores potenciais, professores de matemática que saberão perfeitamente o que é o raciocínio de indução matemática. O nível de detalhe e minúcia do capítulo seguinte não teve esse tipo de leitores em vista. Para eles, o texto poderá ser útil apenas como sugestão de experiências a fazer com os seus alunos ao apresentar-lhes a noção de

indução, evidentemente com as adaptações adequadas ao nível etário.

2. Esta apresentação não foi testada em ambiente de aula e isso constitui de momento uma limitação. O método foi testado com sucesso junto de crianças frequentando o 7.º ano do ensino básico, mas não em ambiente de aula e todos sabemos que não é a mesma coisa. O Atractor tenciona testar o método com crianças ainda mais novas e acolherá com interesse relatos de experiências que venham a ser feitas em ambiente de aula.

JOGO DAS LÂMPADAS

Regras do jogo

Neste jogo há uma fila de lâmpadas, cada uma das quais pode estar acesa ou apagada. Por exemplo, a fila de sete lâmpadas representada na figura  tem quatro acesas e três apagadas. Se o leitor clicar em qualquer das lâmpadas, acesas ou apagadas, o efeito desses cliques pode ser nulo (o clique não muda nada) ou não, neste caso mudando apenas o estado da lâmpada em que clicou: acende-a se estava apagada e apaga-a se estava acesa.

A primeira coisa a fazer é descobrir a regra: quando é que um clique muda o estado da lâmpada clicada e quando é que a deixa no mesmo? O leitor é fortemente encorajado a ver em [1] alguns exemplos interactivos e fazer tentativas, observando o efeito dos cliques e tentando *descobrir por si* a regra geral.



Figura 1

Essas experiências ajudá-lo-ão a familiarizar-se com o jogo das lâmpadas e isso é importante para a fase seguinte. Adie a leitura do que se segue até ter descoberto essas regras. Não querendo seguir o conselho, poderá buscar no apêndice alguma ajuda. Conhecidas as regras, eis dois factos que convém ter presentes:

1. Para uma lâmpada diferente da primeira, mudar (ou não) de



Figura 2



Figura 3

estado por um clique só depende do estado das lâmpadas que estão à sua esquerda.

Sendo assim, como nas cinco filas representadas na figura 2 as lâmpadas nas três primeiras posições estão em idêntico estado (apagada, acesa, apagada), um clique numa lâmpada qualquer até à ordem 4 de uma das filas muda o estado da lâmpada se e só se também mudar em qualquer das outras filas. E o mesmo podemos afirmar para as filas da figura 3:

2. Uma consequência de 1. é que se uma lâmpada mudou de estado por um clique, um novo clique nela, imediatamente a seguir, fá-la-á voltar ao estado anterior, pois o que estava à sua esquerda não sofreu alteração. Por exemplo, se o leitor já aprendeu as regras, sabe que um clique na quarta lâmpada da primeira fila da figura 3, muda o estado dessa lâmpada, passando a fila a ficar igual à segunda fila dessa figura. E um novo clique na quarta lâmpada desta fila fá-la ganhar o aspecto inicial da primeira fila. Como a terceira e a quarta fila coincidem (entre si e com as duas primeiras) até à terceira posição, um clique na quarta lâmpada também muda necessariamente o estado da lâmpada em ambos os casos (envia a terceira fila na quarta ou a quarta na terceira).

OBJECTIVO DO JOGO

Partindo de uma fila só com duas lâmpadas, ambas apagadas, use cliques que conduzam a que essa fila fique só com a última lâmpada acesa (verá que é muito simples). Em seguida, usando cliques adequados a partir da posição a que chegou, volte à posição inicial, em que as duas lâmpadas estavam apagadas. Observe que, para o fazer, usou exactamente os mesmos (três) cliques (e na mesma ordem) que tinha usado na fase inicial para ter só a segunda lâmpada acesa. A figura 4 representa as diversas fases para obter: primeiro, uma fila só com a última lâmpada acesa, depois para regressar à situação de partida; nessa

figura, as circunferências escuras indicam a lâmpada a clicar para passar ao estado seguinte.

Faça algo semelhante para uma fila com três lâmpadas apagadas: como conseguir que só a terceira fique acesa? Nesta fase do texto, já saberá por certo que, pelas regras do jogo, para conseguir acender a terceira lâmpada, à esquerda dela só a segunda deve estar acesa. Mas a essa situação já sabe como chegar: ter só a segunda lâmpada acesa foi o jogo muito simples proposto no início! Clicando em seguida na terceira lâmpada, ela acende e depois há só que apagar a segunda lâmpada. Mas isso foi também o que fez quando, no jogo anterior, voltou à fila com as duas lâmpadas apagadas. A figura 5 representa as fases descritas. Num jogo análogo (acender só a última lâmpada) para filas com 4 ou 5 lâmpadas apagadas, a situação é semelhante à encontrada nos dois casos já vistos.

(A) *Numa fila de lâmpadas, se todas à esquerda da última estiverem apagadas, para mudar o estado da última lâmpada terá obrigatoriamente de conseguir ter acesa apenas a imediatamente anterior; depois mudar o estado da última e em seguida apagar a imediatamente anterior.*

(A) descreve um caminho para jogar o jogo, qualquer que seja a fila de lâmpadas, usando um caminho semelhante para uma fila mais curta! Isto garante que há sempre um tal caminho, porque, se existissem filas para as quais não houvesse um tal caminho, bastaria escolher a mais curta de entre elas. Por ela ser a mais curta nessas condições, para a fila obtida dela tirando a última lâmpada, haveria, para essa ainda mais curta, um caminho e, aplicando o processo descrito em (A), concluiríamos que também existiria um caminho para aquela de que partíramos como sendo a mais curta sem um tal caminho.

Depois de ter jogado os jogos e lido o texto precedente, o leitor poderá ser tentado a explicar o jogo a um amigo e a afirmar: eu sou capaz de jogar um jogo destes com qualquer número



Figura 4



Figura 5



Figura 6

de lâmpadas, ou um pouco mais modestamente, concretizar, afirmando por exemplo que é capaz de jogar o jogo de lâmpadas com 37 lâmpadas.

Sem querermos menosprezar a capacidade do leitor, veremos adiante por que razão esta afirmação está errada e isso não contradiz nada do que está anteriormente escrito.

QUANTAS JOGADAS?

O exemplo usado para descrever uma iniciação ao raciocínio de indução foi propositadamente escolhido por forma a não envolver explicitamente nenhuma afirmação quantitativa. E não há, pois, nenhuma fórmula concreta a ser demonstrada. Tomando como ponto de partida esse exemplo, vamos agora encarar a questão da contagem do número mínimo de jogadas que serão/seriam necessárias para concretizar o jogo das lâmpadas.

Designemos por $f(n)$ o número mínimo de jogadas para concluir o jogo com uma fila de n lâmpadas todas inicialmente apagadas. Claro que $f(1)=1$ e do que vimos atrás resulta que $f(2)=3$ e $f(3)=7$. Vimos como, conhecendo um caminho para o jogo com uma fila de n lâmpadas, também conhecemos para uma fila com mais uma lâmpada: antes de acendermos essa última lâmpada de ordem $n+1$, temos de ter acesa apenas a anterior de ordem n (com $f(n)$ cliques), depois acendemos com um clique a de ordem $n+1$ e finalmente, outra vez com os mesmos $f(n)$ cliques (pela mesma ordem), apagamos a de ordem n . Ao todo usámos $f(n)+1+f(n)$ cliques e não podíamos ter usado menos, portanto concluímos que $f(n+1)=2f(n)+1$. É fácil calcular a partir desta igualdade os primeiros valores do número de cliques necessários:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(n)	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Repare o leitor que todos os números obtidos precedem imediatamente potências de 2. Será que, para qualquer n , $f(n)=2^n-1$? A igualdade é válida para $n=1$: $f(1)=1=2^1-1$; se houvesse algum número para o qual ela não fosse válida, haveria um primeiro número, necessariamente diferente de 1 para o qual seria errada. Chamando p ao seu antecessor, teríamos

$f(p) = 2^p - 1$ e $f(p+1) \neq 2^{p+1} - 1$. Mas já vimos que $f(p+1) = 2f(p)+1 = 2(2^p-1)+1 = 2^{p+1}-1$, contrariamente ao que supuséramos (que era *haver um primeiro número p+1 para o qual a igualdade não se verificava*). Portanto, está provado que aquela fórmula é válida para qualquer n .

Fazendo as contas para o caso da hipotética afirmação do leitor, referida no final da última secção, chegamos à conclusão que seriam precisos $2^{37}-1=137\,438\,953\,471$ movimentos para jogar o jogo com uma fila de 37 lâmpadas. Um leitor com uma velocidade¹ de cliques da ordem de 7 por segundo, se pudesse estar permanentemente a jogar, noite e dia, num ano bissexto teria feito $7.60.60.24.366 = 221\,356\,800$ cliques. Ora, mesmo nessas condições completamente irrealistas, demoraria cerca de 621 anos² para completar o jogo...

O leitor poderá retorquir que então o raciocínio de indução falha na hipotética afirmação sobre a sua capacidade de jogar o jogo das 37 lâmpadas. A resposta é: o raciocínio em si não está a falhar, o que acontece é que não se verifica uma das condições da indução para a afirmação de que *é capaz de jogar...* Não é verdade que, *se o jogador é capaz de jogar para n lâmpadas, então também é para n+1*³.

OUTRAS FORMAS DE INDUÇÃO⁴

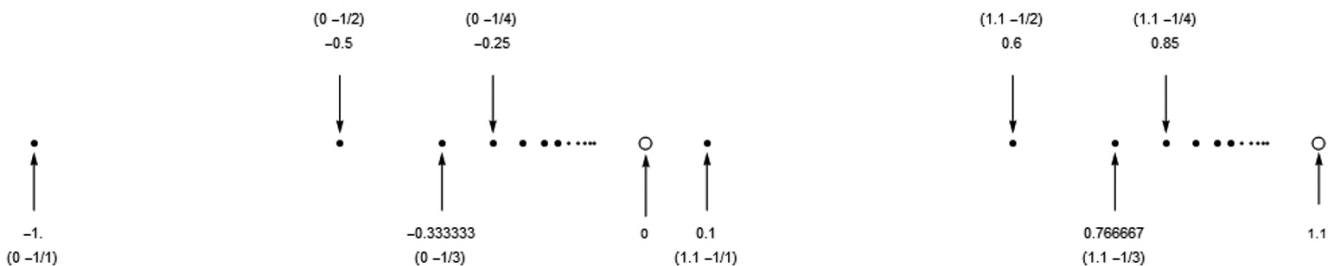
Propriedades do conjunto N (dos números naturais) que foram implícita ou explicitamente usadas atrás:

Toda a parte não-vazia de N tem primeiro elemento (traduz-se esta propriedade dizendo que o conjunto N é bem ordenado).

$i1 - N$ é a única parte de N satisfazendo as condições:

- tem o primeiro elemento de N ;
- se tem um número, também tem o seguinte.

(Se houvesse em N uma parte $A \neq N$ com estas propriedades, considerando o primeiro elemento b no complementar de A em N , o seu antecessor $b-1$ estaria em A e, portanto, também estaria o sucessor de $b-1$ que é b). Para uma afirmação P_n dependente de n , chamando A ao conjunto dos n para os quais P_n é satisfeita, concluir que se A satisfaz aquelas duas condições então coincide com N equivale a afirmar que, se P_1 é verdadeira e se P_n implica P_{n+1} então P_n é verdadeira para todo o n .



Consideremos agora as duas sucessões $(-1/n)_n$ e $(1.1-1/n)_n$, que são crescentes e convergentes, designemos por A e B os respectivos contradomínios e por M a sua reunião.

Note-se que M é bem ordenado. Será que a indução, sob a forma atrás usada em N , funciona em M ? A resposta é não. É verdade que: i) o primeiro número de M , que é -1 , é negativo; e ii) se um número de M é negativo, o seguinte também é. Mas nem todos os números de M são negativos. E o primeiro número não negativo de M , que é 0.1 , não tem antecessor em M , isto é, 0.1 não é o sucessor de nenhum número de M e, portanto, não podemos aplicar o argumento anterior. Há uma parte não-vazia de M diferente de M , que satisfaz as duas condições. Conclusão: a indução, sob a forma atrás enunciada para N , não funciona para conjuntos só bem ordenados. Fortalecendo a condição $i1 - b)$ para $i2 - b)$ podemos afirmar o seguinte:

Num conjunto P bem ordenado qualquer, P é a única parte D de P satisfazendo

i2.a. - D tem o primeiro elemento de P ;

i2.b. - se D tem todos os elementos menores do que um m de P , também tem esse elemento m .

Se D não coincidissem com P , tomávamos o primeiro elemento m de P que não estivesse em D (existiria, por P ser bem ordenado e D ser não vazio devido a $i2-a)$; os elementos menores do que m pertenceriam a D , e $i2-b$ implicaria que m também pertenceria a D , o que contrariaria a forma como m foi escolhido.

Voltando ao contraexemplo M indicado atrás, notemos que M já não serve como contraexemplo⁵ para o princípio da indução $i2$: só M satisfaz as duas condições $i2$.

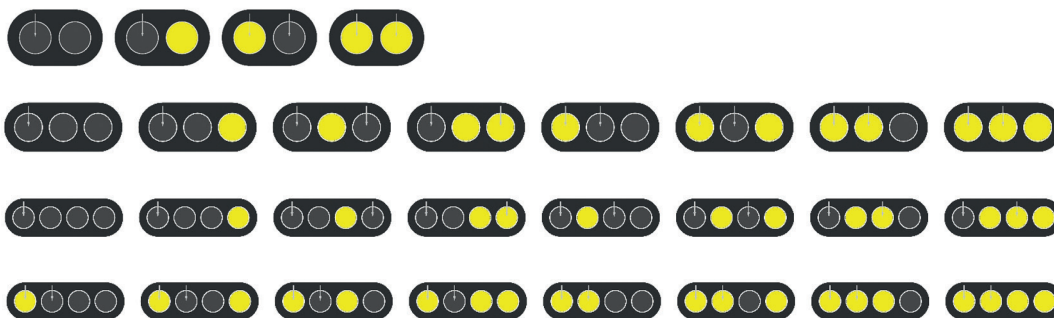
Deixa-se ao leitor a verificação de que o conjunto dos números negativos de M não satisfaz $i2 - b)$.

APÊNDICE

As regras do jogo das lâmpadas

Se não quer descobri-las sem ajuda, comece por observar as imagens seguintes. Por cima daquelas cujo clique muda o estado, está uma seta.

Poderá observar que a primeira lâmpada tem sempre uma seta: o estado da primeira muda sempre por um clique. Pode não haver



mais nenhuma que mude o estado ao ser clicada (quando é que isso acontece?); ou pode haver (no máximo) uma segunda, que, ao ser clicada, muda de estado. Nesta última hipótese, qual é essa segunda lâmpada que muda de estado? Sabendo que uma lâmpada diferente da primeira *mudar de estado* só depende do estado das lâmpadas que estão à sua esquerda, tente novamente descobrir a regra. E volte a jogar com os jogos facultados em [1]. Em último caso, veja a resposta na seguinte frase:

Será a lâmpada seguinte à primeira acesa.

Notas

¹Um programa adequado poderá realizar jogadas a grande velocidade; mas, para um jogador humano, supor 7 cliques por segundo traduz já um certo optimismo.

² Supostos todos bissextos para simplificar as contas...

³ Para evitarmos evocar aspectos menos agradáveis, digamos que o leitor poderá ter descoberto que talvez tenha melhores formas de passar o tempo do que jogar um jogo como este durante vários dias ou meses seguidos.

⁴ A leitura desta secção não é essencial à plena compreensão do resto do artigo.

⁵ A construção do contraexemplo M para $i1$ usava um elemento (diferente do primeiro) sem antecessor, e num conjunto bem ordenado não vazio um tal elemento existe se e só se houver um conjunto infinito majorado. Mas um conjunto infinito bem ordenado sem partes infinitas majoradas é, do ponto de vista da relação de ordem, perfeitamente equivalente a N . Em N verificam-se $i1$ e $i2$ e essa situação é por vezes designada por *princípio da indução finita* precisamente por a hipótese de indução se referir sempre a um conjunto finito de valores.

Referências

[1] <https://www.atractor.pt/mat/jogodaslampadas>

ASSOCIAÇÃO ATRACTOR