Criatividade, sons e matemática

Margarida Font Amado
M. Isabel Rocha

Associa-se normalmente a ideia de criatividade às artes (um músico é criativo, um poeta é criativo, um pintor …), deixando-se de fora desse universo ciências como a matemática, a que se associa o rigor e os números. Como se estes excluíssem aquela...

Partindo desta constatação, refletimos sobre o modo como a música e a poesia precisam de e usam os números — e neste caso, notámos a coincidência do 5, do 7 e do 12 — e como o pensamento matemático é por natureza criativo.

ESCOLA PITAGÓRICA

Como sabemos, os Pitagóricos estudavam geometria, aritmética, astronomia e música.

Pitágoras, assim como Orfeu, compunha e tocava lira desde muito jovem. E a música, para ele, tinha várias finalidades, inclusive pedagógicas: a purificação da mente, a cura de doenças, o domínio da raiva e da agressividade do homem, dentre outras coisas. Com o auxílio da música, criava um ambiente de harmonia e tranquilidade para passar os seus ensinamentos aos discípulos. A música é constituída basicamente de uma sucessão de sons e silêncio organizada ao longo do tempo, sendo os três elementos principais de uma composição musical a melodia, a harmonia e o ritmo.

Pitágoras, ao que tudo indica, estava interessado em entender aquilo que hoje se denomina harmonia. Por outras palavras, pode-se dizer que os seus estudos consistiam em descobrir que combinações de sons eram agradáveis aos ouvidos.

SONS E MATEMÁTICA

Uma corda (esticada em linha reta entre dois suportes físicos) pode vibrar de muitas maneiras diferentes, dependendo da maneira como é puxada. O tom do som é determinado pela frequência da vibração — o ritmo ao qual a corda se desloca de um lado para o outro — e assim a mesma corda pode vibrar com frequências diferentes. E Pitágoras, com as suas experiências no monocórdio, mostrou que o tom depende da posição dos nós – os tais pontos ao longo da corda que se mantêm fixos — e que os tons dos sons obtidos se traduziam em relações numéricas simples. Daí a designação em matemática de média harmónica.

O som produzido pela corda solta/inteira era o mesmo que o produzido pressionando a meio da corda (figura 1), mas mais agudo, conhecido como oitava de um som (na escala atual esta é a oitava nota).

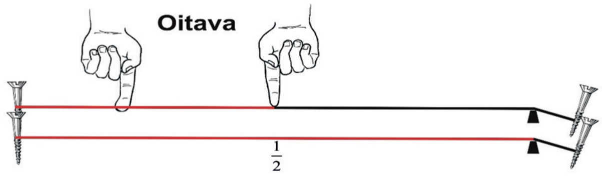

Figura 1. O Monocórdio

Se colocarmos o dedo a um terço da corda estamos a criar dois nós (o outro posicionado a dois terços da corda) e isto produzirá uma nota ainda mais alta (nota em intervalo de quinta na razão de 3 para 2) (figura 2). Note-se que Pitágoras verificou que a frequência da nota tem uma relação de proporcionalidade inversa com o comprimento da corda associado a essa nota (razão de 2 para 3).

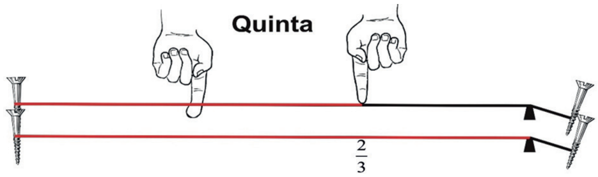

Figura 2

Também se pode obter uma nota em intervalo de quarta (na razão de 4 para 3, considerando 4 nós).

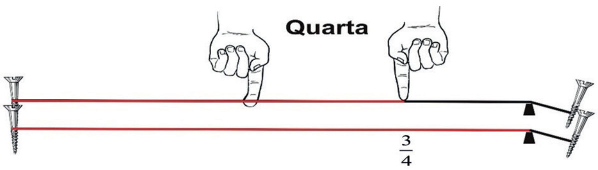

Figura 3

O monocórdio, ao ser tocado na modalidade 'corda solta', isto é, presa apenas pelas extremidades, produzia um som, uma nota musical que serviria de referência para que se pudesse determinar as outras. As notas encontradas foram determinadas a partir de proporções numéricas bem definidas[1]:

[1] Pereira, M.C. (2013). Matemática e Música-De Pitágoras aos dias de hoje. Em: http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/matematica-e-musica-de-pitagoras-aos-dias-de-hoje

1. A Tónica (primeira nota de uma escala), de razão 1:1 ➔ comprimento da corda c
2. A Oitava, de razão 1:2 ➔ comprimento c/2
3. A Quinta, de razão 2:3 ➔ comprimento 2c/3
4. A Quarta, de razão 3:4 ➔ comprimento 3c/4

Estava encontrada a primeira escala musical formada por quatro sons descobertos por Pitágoras, que hoje representam a 1.ª, a 8.ª, a 5.ª e a 4.ª notas na escala atual (dó$_1$, ré$_1$, mi$_1$, fá$_1$, sol$_1$, lá$_1$, si$_1$, dó$_2$)[2].

Talvez tenha sido a primeira noção de acorde, que, por definição, é a reprodução de um grupo de notas ao mesmo tempo.

$\boxed{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}}$ Ao comparar estas frações $\boxed{\frac{12}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}}$ verificamos que:

9 é a média aritmética entre 6 e 12: $\frac{6+12}{2}=9$

8 é a média harmónica entre 6 e 12: $\frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}=\frac{2}{\frac{2}{12}+\frac{1}{12}}=2\times\frac{12}{3}=2\times4=8$

6, 8, 9 e 12 formam uma proporção: $\frac{6}{8}=\frac{9}{12}$ $(6\times12=8\times9)$

Este princípio é o mesmo que ocorre em qualquer instrumento de corda. As variações de frequência sonora a partir das proporções das cordas possibilitaram o surgimento de uma escala diatónica pitagórica de sete sons harmónicos, utilizando a chamada consonância pitagórica.

ESCALAS MUSICAIS DE 5 E 7 NOTAS

Partindo da experiência de Pitágoras, a maneira bastante utilizada por músicos em todo o mundo foi criar uma escala que se baseia na sucessão de quintas, denominado Ciclo das Quintas, ou seja, é formada multiplicando a frequência do som anterior pela razão 3:2. Tomando o comprimento da corda como a unidade, que corresponde ao som do DÓ, o som seguinte corresponde ao comprimento de corda de 2/3 da corda inicial, nota que foi designada por SOL (figura 4).

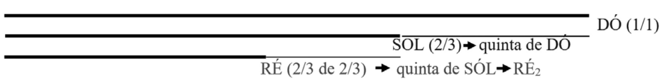

Figura 4

Ora a quinta da nota SOL corresponde a um comprimento da corda de 4/9 (2/3 de 2/3) da corda inicial, logo esta nota está na 2.ª oitava $\left(\frac{4}{9}<\frac{1}{2}\right)$, daí a designação de RÉ$_2$, tem de se transpor para a nota equivalente nos limites da 1.ª oitava (figura 5), o que se consegue multiplicando por dois.

[2]No tempo de Pitágoras, as notas musicais não tinham estes nomes, nem eram utilizadas as designações oitava, quinta, etc. Estas surgem em função da escala atual.

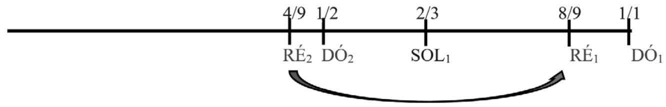

Figura 5

Continuando o ciclo das quintas, obtemos a nota LÁ$_1$ (figura 6) que é a quinta de RÉ$_1$ $=\frac{2}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{27}$

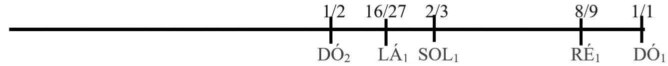

Figura 6

Continuando: Quinta de LÁ$_1$ $=\frac{2}{3}\times\frac{16}{27}=\frac{32}{81}$ ➔ MI$_2$

Esta nota está na 2.ª oitava pois $\frac{32}{81}<\frac{1}{2}$, a nota equivalente na 1.ª oitava (figura 7) corresponde ao comprimento de corda $2\times\frac{32}{81}=\frac{64}{81}$ ➔ MI$_1$

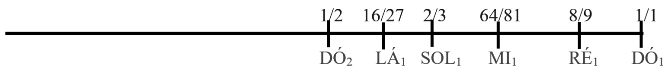

Figura 7

E ainda o ciclo das quintas leva-nos à nota SI: $\frac{2}{3}\times\frac{64}{81}=\frac{128}{243}$ número muito próximo de $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}=\frac{128}{256}\right)$

Devido à sua proximidade da nota DÓ$_2$, não soavam muito bem tocadas juntas, pelo que foi inicialmente desprezada, obtendo-se a escala de 5 sons, designada por escala pentatónica:

DÓ, RÉ, MI, SOL, LÁ

Tendo em conta a relação de proporcionalidade inversa entre a frequência da nota e o comprimento da corda associada, obtém-se a tabela de frequências das cinco notas da escala (tabela 1).

Tabela 1. Notas e suas frequências numa escala pentatónica

nota	DÓ	RÉ	MI	SOL	LÁ	DÓ$_2$
frequência	f	$\frac{9}{8}f$	$\frac{81}{64}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{27}{16}f$	$2f$

Se gosta de música dos anos 60, pode recordar os *Temptations*, em “My girl” como exemplo de utilização de uma escala pentatónica em: https://youtu.be/uCcNcHx2DpY

Observando a harpa pentatónica (figura 8), verifica-se que tem dois grandes espaços: um entre as cordas 3 e 4 e outro entre as cordas 5 e 6.

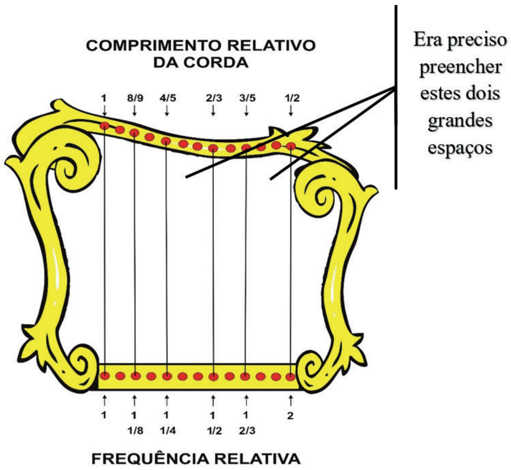

Figura 8. Harpa pentatónica

A nota FÁ da escala de Pitágoras (a quarta, correspondendo a 3/4 do comprimento da corda) fica entre as cordas 3 e 4. Para preencher a lacuna entre as cordas 5 e 6 escolhe-se a de menor comprimento (corresponde à nota SI) porque dá uma frequência $1\frac{7}{8}$ da frequência da corda mais longa.

Obtém-se a escala diatónica pitagórica de sete sons (escala heptatónica) (figura9):

DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ, SI

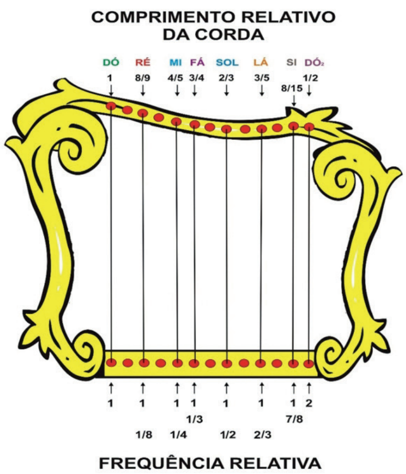

Figura 9. Escala heptatónica

O NÚMERO 7 NA POESIA...

Chegados às 7 notas da escala heptatónica, é altura de pensar um pouco sobre a poesia. Não a poesia no sentido daquilo que, por ser belo ou ideal, desperta emoções, mas a poesia como matéria sonora, isto é, uma sucessão de sons, uma determinada organização rítmica das palavras, dispostas em versos. A poesia que é também musicalidade, ritmo, métrica, quer dizer, medida. E quem diz medida, diz contagem e números.

Quem acentua muito bem a importância da medida na poesia é o grande poeta simbolista francês, Paul Verlaine (figura 10), que, na sua *Arte Poética*, define a poesia como música acima de tudo, e aconselha mesmo a utilização do verso ímpar (que no seu caso é o de 9 sílabas), "mais vago e solúvel no ar/ sem nada nele que pese ou que pouse"... O poema começa assim:

De la musique avant toute chose,
Et pour cela préfère l'Impair
Plus vague et plus soluble dans l'air,
Sans rien em lui qui pèse ou qui pose.

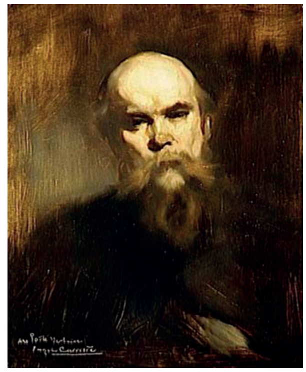

Figura 10. E. Carrière, Retrato de Verlaine

A medida que na poesia portuguesa é, por assim dizer, a mais "natural" é o verso de 7 sílabas, a redondilha maior. É este o verso que encontramos predominantemente em quadras populares, é esta a "música" (para a qual também contribui a posição das sílabas acentuadas ao longo de cada verso, não aleatória) que mais espontaneamente surge em português. Encontramo-la nas quadras populares como, por exemplo, esta, de um lenço de namorados (figura 11), uma tradição minhota:

A/qui/ tens/ meu/ cu/ra/ção
E a chabe pró abrir
Num tenho mais que te dar
Nem tu mais que me pedir.

Figura 11

Também o primeiro poema que conhecemos de Fernando Pessoa, feito ainda menino e intitulado *À minha mamã,* tem a mesma medida:

Eis/-me a/qui/ em/ Por/tu/gal
Nas terras onde eu nasci
Por muito que goste dela
Ainda gosto mais de ti.

Mais tarde, o grande Pessoa (figura 12) continua a medir as 7 sílabas (sempre contadas só até à última sílaba tónica) e, na edição das suas obras pela Editora Ática, um dos volumes chama-se precisamente *Quadras ao Gosto Popular*. Aí podemos ler, por exemplo:

Cantigas de portugueses
São como barcos no mar
Vão de uma alma para outra
Com risco de naufragar.

Figura 12. Almada Negreiros, Retrato de Fernando Pessoa, 1964

Na verdade, a utilização da redondilha maior vem de trás. No *Cancioneiro Geral* (figura 13), primeira coletânea impressa de poesia portuguesa, dos séculos XV e XVI, publicado por Garcia de Resende em 1516, são muitos os poemas com esta medida.

Figura 13. Cancioneiro Geral de Garcia de Resende, 1516

Um dos mais conhecidos é a *Cantiga Partindo-se*, em que o poeta, João Roiz de Castelo Branco, exprimindo embora de forma criativa um pungente sentimento de tristeza, não deixa de contar rigorosamente as 7 sílabas:

Senhora, partem tão tristes
meus olhos por vós, meu bem,
que nunca tão tristes vistes
outros nenhuns por minguaém.

Tão tristes, tão saudosos,
tão doentes da partida,
tão cansados, tão chorosos,
da morte mais desejosos
cem mil vezes que da vida.
Partem tão tristes os tristes,
tão fora d' esperar bem,
que nunca tão tristes vistes
outros nenhuns por ninguém.

Pode ouvir esta Cantiga interpretada por Amália Rodrigues, com música de Alain Oulman, em https://youtu.be/oNIgGjsUBO4

… E O NÚMERO 5 …

Mas tal como nas escalas pitagóricas aparecem os números 5 e 7, também a redondilha maior de 7 sílabas aparece acompanhada da redondilha menor, de 5. Encontramos muitos exemplos no *Cancioneiro Geral* e também no grande Camões, como, por exemplo, esta *Cantiga*:

a este mote alheio
Verdes são os campos
de cor do limão
assi são os olhos
do meu coração.

Voltas
Campo, que te estendes
com verdura bela;
ovelhas que nela
vosso pasto tendes,
d'ervas vos mantendes
que traz o verão,
e eu das lembranças
do meu coração.

Gado, que pasceis
co contentamento,
vosso mantimento
não no entendeis:
isso que comeis
não são ervas, não:
são graças dos olhos
do meu coração.

Assim, se o poeta é criativo na escolha do interlocutor (o campo e as ovelhas) e nas imagens que nos oferece (as ervas tornam-se a recordação, que lhe dá vida, da amada ausente, e até deixam de ser ervas, mas emanação dos olhos verdes dela), ele não perde o sentido do rigor da medida exata dos seus versos.

Pode ouvir esta Cantiga musicada e cantada por José Afonso em https://youtu.be/WgZTWZligHE

… E FINALMENTE O NÚMERO 12

Mas nem todos os poetas gostam da mesma medida. Para Cesário Verde, não há nada como o difícil alexandrino bem medido. No poema *Contrariedades*, em que exprime um angustiado mal-estar, queixando-se de estar "cruel, frenético, exigente", de amar "insensatamente os ácidos, os gumes e os ângulos agudos", mantém, no entanto, o foco na contagem exata das 12 sílabas dos 3 primeiros versos de cada uma das 17 quadras, sendo que o 4.º verso mede apenas 6 sílabas, rigorosamente metade dos anteriores. Ele próprio se refere a essa operação, na qual se *apura*, no final de uma das estrofes:

E a/pu/ro/-me em/ lan/çar/, o/ri/gi/nais/ e e/xa/tos,
Os/ meus/ a/le/xan/dri/nos...

ESCALA TEMPERADA (ESCALA CROMÁTICA)

Também na música nos aparece o número 12. O sistema de escala ocidental, que se designa por “temperamento igual”, foi desenvolvida na Europa na segunda metade do séc. XVIII e ainda hoje é usada, para quase toda a música *jazz, folk, rock* e clássica, embora os matemáticos se tenham começado a debruçar sobre a questão da divisão da oitava em intervalos iguais no início do séc. XVII. Galileu e Chu Tsai-Yu, com um ano de diferença (desconhecendo o trabalho de cada um, não tinham as redes *linkedin* ou *research gate* para partilhar …) desenvolveram a escala temperada, mas ignorados durante um século[3].

Já referimos que soam bem juntas duas notas separadas por uma oitava. No entanto e, por um lado, a oitava foi considerada um intervalo musical muito grande porque uma voz de canto não treinada só consegue abranger um par de oitavas[3]. Por outro lado, os ocidentais já tinham constatado que as notas DÓ$_2$ e SI eram muito próximas uma da outra e entre DÓ e RÉ, por exemplo, precisaria existir uma nota intermédia, pois a distância entre DÓ e RÉ (um tom) era maior que a distância entre SI e DÓ$_2$ (um meio tom). Decidiram criar uma escala mais abrangente. Nessa escala, todas as notas deveriam ter a mesma distância umas das outras. E essa distância deveria ser aproximadamente o intervalo que havia entre DÓ$_2$ e SI (um meio tom).

Daí a necessidade sentida de dividir a oitava em intervalos mais pequenos que também permitisse começar uma melodia em qualquer nota.

Por meio da análise das frequências, verificou-se que o quociente entre a frequência da nota DÓ$_2$ e a frequência da nota SI era aproximadamente 1,0595383 $\left(\frac{f_{DÓ_3}}{f_{SI_2}} = \frac{261,6\,Hz}{246,9\,Hz} = 1,0595383\right)$

Era este o valor do intervalo musical desejado entre cada par de notas.

Seriam precisas mais 5 notas, o que perfaz 12. Mas porquê mais 5? Porquê 12?

Se considerarmos a frequência da nota DÓ, a nossa unidade de partida (1), teremos de ir multiplicando sucessivamente por 1,0595383, até obtermos a frequência da nota DÓ$_2$ (uma oitava acima), ou seja, 2.

1 x 1,0595383 x 1,0595383 x 1,0595383 x 1,0595383 x …. = 2

Estamos perante uma progressão geométrica de razão 1,0595383, ou seja, procuramos o número n tal que $1\times1,0595383^{n}= 2$

DÓ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,0595	1,1225	1,1893	1,2601	1,3351	1.4145	1,4987	1.5879	1.6824	1.7825	1.8885	2.001

$1,0595383^{12} \approx 2$ donde $1,0595383 \approx \sqrt[12]{2}$

[3] Powell. J. (2012). Como funciona a Música. Lisboa: Editorial Bizâncio

Chega-se assim à conclusão que a escala temperada terá de ter 12 notas.

As cinco notas inseridas são, no sentido ascendente, designadas por sustenido (#) e no sentido descendente por bemol (♭) (figura 14). Por exemplo Fá sustenido, representa-se por Fá# e Si bemol por Si♭.

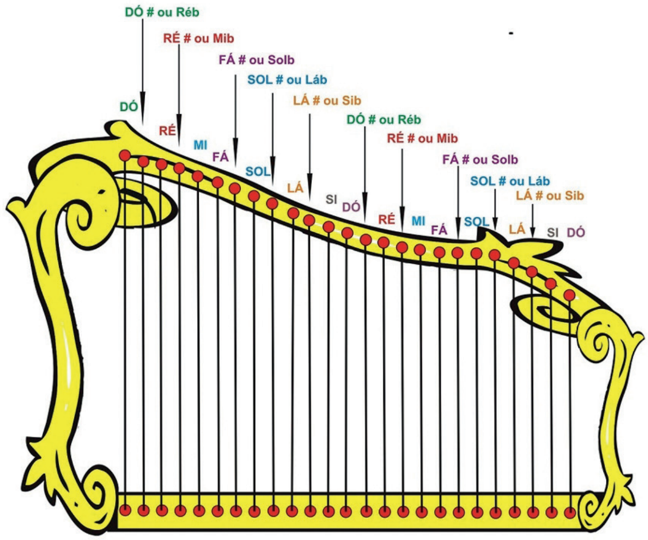

Figura 14. Harpa de duas oitavas com todas as notas designadas

Bach, um génio da música barroca e um entusiasta do novo temperamento, foi, por assim dizer, o grande difusor da nova escala. A partir de sua morte, o Ocidente rendeu-se ao novo sistema de afinação.

A sua célebre obra *Cravo Bem temperado*, um conjunto de 48 prelúdios e fugas que exploram todas as tonalidades possíveis, é um bom exemplo do uso desta escala, bem como a Tocata e Fuga em ré menor que se pode ouvir em https://youtu.be/ipzR9bhei_o

Referências

Pereira, M.C. (2013). *Matemática e Música-De Pitágoras aos dias de hoje.* Em: http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/matematica-e-musica-de-pitagoras-aos-dias-de-hoje

Powell. J. (2012). *Como funciona a Música.* Lisboa: Editorial Bizâncio

Margarida Font Amado

Escola Secundária Eng. Acácio Calazans Duarte, Marinha Grande

M. Isabel Rocha

Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de leiria

Agradecemos a colaboração do colega José Nobre da E.S. Calazans Duarte, na conceção das imagens dos monocórdios e das harpas.