

Raciocinar tem mais que se lhe diga!

MARIA EUGÉNIA JESUS
HELENA COUTINHO

Este artigo condensa o essencial de alguns dos muitos desafios e respetivas partilhas que os alunos realizaram ao longo do ano letivo 2015/2016, numa turma do 4.º ano numa escola de Faro. Tem por base uma comunicação apresentada no encontro de professores de matemática que se realizou nos dias 1 e 2 de julho de 2016, em S. Brás de Alportel, na Escola Secundária José Belchior Viegas - ALGARMAT 2016.

Entendemos recolher evidências da forma como o grupo/turma trabalhava a organização e explicitação do pensamento e raciocínios matemáticos.

Segue-se um relato circunstanciado de algumas evidências de reflexão – nomeadamente, as consideradas mais significativas neste processo.

Serviu-nos de suporte teórico a obra de Smole e Diniz (2001) - Ler, Escrever e Resolver Problemas - Habilidades Básicas para Aprender Matemática. Estas autoras defendem que a resolução de problemas deve colocar o aluno perante a tomada de decisões para alcançar um objetivo traçado por ele mesmo ou que lhe foi proposto, mas com o qual ele interage, se desafia e envolve.

Para cada desafio apresentamos um suporte teórico, uma tarefa, o raciocínio dos alunos, e a discussão e por fim as nossas reflexões. O ambiente de aprendizagem na sala de aula permitiu que individualmente, a pares ou em pequenos grupos todos pudessem participar, opinar, comunicar e trocar informações e experiências (embora não tivéssemos transcrito todas essas interações para este artigo).

Os alunos, mediados por nós, desenvolveram conhecimentos matemáticos. E para que a aprendizagem da matemática se tornasse significativa, refletimos juntos sobre os registos de tarefas, desafios, problemas, atividades e exercícios. Tentámos potenciar a concretização de ideias matemáticas através da comunicação dos pensamentos, das experiências, das estratégias, do dizer como se fez, pois partilhar o pensamento e explicar o raciocínio ajuda a que os conteúdos sejam apropriados, tendo em conta que:

“...raciocinar remete para calcular, mas também para usar a razão ao julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir. Assim, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo. Também raciocinamos ao apresentar razões que justificam ideias

ou posicionamentos, ao argumentarmos para nos convencermos, ou para convencer outros, da plausibilidade de conjecturas que enunciamos e da razoabilidade de afirmações que fazemos ou ao procurarmos explicar a coerência entre o que se aceita como válido e as suas consequências.” (Boavida & Menezes, 2012, p.289)

Os materiais utilizados tiveram fontes diferenciadas: manuais em vigor, de acordo com o programa e metas; sites e blogues (recurso à Internet); grupo de trabalho de formação cooperada do Movimento da Escola Moderna (MEM), e construídos na turma.

As citações que antecedem as tarefas constituem o suporte teórico que anteriormente referimos.

Tarefa 1 – Os botões

“Introduzir os recursos de comunicação nas aulas de matemática (...) pode concretizar a aprendizagem numa perspetiva mais significativa para o aluno e favorecer o acompanhamento desse processo por parte do professor.

Analisar o papel da oralidade, das representações pictóricas e da escrita como recursos de ensino permite vislumbrar uma nova dimensão para a prática escolar em sintonia com as pesquisas sobre a aquisição do conhecimento e da aprendizagem.” (Smole & Diniz, 2001, p.15)

O Hugo perdeu o seu botão e o seu amigo Rui está a tentar ajudar a encontrá-lo.

Podes ajudar o Rui a encontrar o botão do Hugo? Aqui estão algumas pistas:

- O botão não é preto.
- O botão não é pequeno.
- O botão não é quadrado.
- O botão não deve ter 2 buracos.
- O botão não é fino.

Qual é o botão do Hugo?

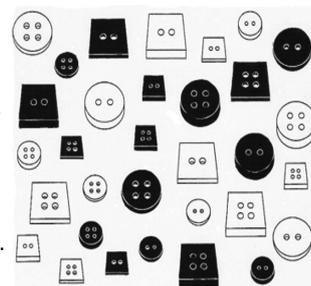


Figura 1. Enunciado da tarefa 1

Fonte: <https://casconha2quartoano.files.wordpress.com/2011/01/problemas-da-semana.doc>

Trabalho realizado individualmente em sala de aula. Os alunos apresentaram os seguintes raciocínios justificando a escolha do botão/resposta:

- “É o botão grosso, grande, com 4 buracos, é grande” (João);
- “Tínhamos que saber qual era o botão do Hugo - não era

preto portanto risquei os botões pretos; depois tinha de riscar os quadrados; a seguir risquei os botões pequenos e por fim os brancos” (Diogo);

- “Pois, não é preto, o botão não é pequeno nem quadrado” (Matilde);
- “O botão do Hugo é um branco, com quatro buracos e gordo” (Anne);
- “Eu acho que é o 13.º botão” (David)
- “É o botão rodeado” (Vaz);
- “É o branco, porque não é fino, não tem dois buracos e não é preto” (Rodrigo);
- “Eu fiz assim, contei os botões e soube qual era o do Hugo” (Bernardo).

Consideramos que a dificuldade que os alunos encontraram em responder à questão formulada não se prendeu com dificuldades na leitura e compreensão, nem com falta de rotinas de um trabalho pedagógico específico de matemática mas sim com a dificuldade em “descrever” o botão utilizando as quatro características que o identificam.

Tarefa 2 – As horas de trabalho

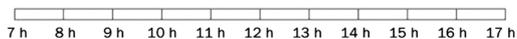
“Em qualquer área do conhecimento a leitura deve possibilitar a compreensão de diferentes linguagens de modo a que os alunos adquiram uma certa autonomia no processo de aprender (...)

A leitura reflexiva exige que o leitor se posicione diante de novas informações procurando a partir da leitura, novas compreensões.”

(Smole & Diniz, 2001, p. 69)

Lê e responde.

A Fabiana organizou o dia dela da seguinte maneira: saiu de casa às 7h00 da manhã; chegou ao trabalho às 8h00; teve uma hora de almoço; saiu do trabalho às 16h00 e chegou a casa às 17h00.



- Quanto tempo passou desde que ela saiu de casa até à hora em que voltou?
- Que fração desse período representa o tempo que ela teve para o almoço?
- Que fração desse período representa o tempo que ela gastou no trajeto para ir trabalhar e para voltar para casa?
- Que fração desse período representa o tempo em que ela esteve no trabalho?

Figura 2. Enunciado da tarefa 2

Fonte Alfa - Matemática 4 - 4.º Ano, Eva Lima, Nuno Barrigão, Nuno Pedroso, Vítor da Rocha – Porto Editora - manual adotado (versão on line – Escola Virtual)

Trabalho realizado individualmente tendo suscitado as seguintes intervenções:

- “Passaram 10 horas, fiz assim: onde estão registadas as horas escrevi 1h, 2h, 3h até chegar às 17h e deu-me 10 horas” (Catarina);
- “Eu também acho desde que saiu de casa até que voltou, passaram 10 horas. (E continua) porque saiu às 7h, mais uma hora a chegar ao trabalho, teve lá 8h, com uma hora de almoço, (conclui) depois demorou uma hora a chegar a casa” (Anne);

- “Sim, passaram 10 horas, eu vi na linha, das 7 às 17h” (Rosa) - Respondendo à questão da alínea b);
- “Tempo de almoço: 1/8 o que quer dizer 1h de almoço e o 8, quando chegou ao trabalho” (Rodrigo);
- “O tempo almoço é 1/10 (justifica) pois 1 é a hora do almoço e 10 é o tempo que esteve fora de casa (alínea a)” (Diogo);
- “Mas...na alínea a, pergunta quanto tempo passou desde que ela saiu de casa, e até à hora em que voltou e não pergunta as horas que trabalhou por isso não é 1/8 mas 1/10 foram as 10h que esteve fora” (Ana Carolina);
- Outros Argumentos (alínea c):
 - “2/17 saiu às 16h e chegou às 17h a casa... se juntar as 4 e as 7 ficam duas horas” (Andreia);
 - “2/10 porque ela demorou uma hora de manhã e uma hora à tarde” (Janaína);
 - “2/10 significa 1 + 1 que são 2 num total de 10” (Vaz);
- Argumentos (alínea d):
 - Fração 7/10 representa o n.º de horas que trabalhou” (Eva);
 - “O 7 representa... e o 10 representa ... o 7 representa as horas de trabalho e 10 as horas que esteve fora (10 -1h de transporte, -1h de almoço, -1 de transporte)” (Dinis).

A forma como a tarefa está apresentada (embora com a ajuda de uma linha de tempo) e a falta de compreensão, pelos alunos, de algum dos conceitos envolvidos revelou, do nosso ponto de vista, dificuldade na passagem da linguagem matemática para a circunstância do problema (quotidiano). Isto é, não fazem parte do quotidiano, e há significados diferentes na matemática e fora dela.

Tarefa 3 – Os círculos

“Os recursos da comunicação são também valiosos para interferir nas dificuldades encontradas ou para permitir que o aluno avance mais, propondo-se outras perguntas ou mudando a forma de abordagem. Quando assumimos que a resolução de problemas/ tarefas /... está intimamente relacionada à aprendizagem de conteúdos, o recurso à comunicação é essencial, pois é o aluno, falando, escrevendo ou desenhando, que mostra ou fornece indícios das habilidades e atitudes que está a desenvolver, que conceitos domina e que dificuldades apresenta.” (Smole & Diniz, 2001, p. 95)

O Ivo recortou um círculo vermelho com 56 cm de diâmetro e a Maria recortou dois círculos, um azul com 14,5 cm de raio e outro verde do mesmo tamanho.

Calcula o raio e o diâmetro de cada círculo e completa a tabela

	Círculo vermelho	Círculo azul	Círculo verde
Raio			
Diâmetro			

Os dois círculos da Maria cabem, um ao lado do outro, dentro do círculo do Ivo? Justifica a tua resposta.

Figura 3. Enunciado da tarefa 3

Fonte: Alfa - Matemática 4 - 4.º Ano, Eva Lima, Nuno Barrigão, Nuno Pedroso, Vítor da Rocha – Porto Editora - manual adotado (versão on line – Escola Virtual)

Esta tarefa foi realizada a pares, e apresentam-se alguns argumentos explicitados em grande grupo.

Alguns consideraram que não cabiam:

- “Não cabe porque 56cm é menor que 58cm que é a soma dos dois círculos da Maria” (João e Eva);
- “Não. Era preciso mais 2 cm porque $29 + 29 = 58$ e o círculo do Ivo só tem 56” (Vaz e David);
- “Não porque 58, era preciso mais 18cm” (Joana e Matilde);
- “O círculo do Ivo é mais pequeno 2cm do que o da Maria” (Diogo e Catarina);
- “Não cabe, pois $29 + 29$ é 58 e o do Ivo é 56” (Maria Inês e Carolina);
- “Precisávamos de mais 1 cm. Não cabem porque o do Ivo é maior” (Daniel e Rodrigo).

Outros alunos responderam:

- “ $14,5 + 14,5$ dá 29 e $29 + 29$ dá 58 e o do Ivo tem 56”. (Rosa e Cadina);
- “Vai ficar um cm de um círculo e um cm de outro círculo de fora (28 é menor que 29cm)” (Ana e Sílvia);

Outros acham que cabia:

- “Cabia porque 56cm é maior que 14,5cm” (Janaína e Ricardo).

Como a apresentação da tarefa não foi oral, não se garantiram os meios para que todos os alunos iniciassem a sua resolução sem dúvidas quanto ao significado das palavras que nela aparecem. Cremos terem os alunos, revelado alguma dificuldade nos conceitos envolvidos. Resolveram através do cálculo, não recorrendo a competências relacionadas com o conteúdo da geometria (relação raio/diâmetro).

No fim foi necessário fazer a verificação do resultado, tendo-se usado o desenho dos três círculos recorrendo ao quadro interativo.

Tarefa 4 – O monstro das três cabeças

“Cada momento na resolução de problemas deve ser de investigação, descoberta, prazer e aprendizagem. A cada proposta de resolução, os alunos devem ser encorajados a refletir e analisar detalhadamente o texto, estabelecendo relações entre os dados numéricos e os outros elementos que o constituem e também com a resposta obtida, percebendo se esta é ou não coerente com a pergunta e com o próprio texto.” (Smole & Dinis, 2001, p. 120)



Isto é o monstro das três cabeças. Cada vez que tem dores numa das suas cabeças, tem de tomar 4 comprimidos. Hoje sentiu dores nas três cabeças. Mas o frasco já estava no fim e faltaram comprimidos para uma cabeça. Quantos comprimidos havia no frasco?

Figura 4. Tarefa partilhada pelo grupo de formação cooperativa online

O trabalho foi realizado a pares. Registos da intervenção dos alunos durante a apresentação em grande grupo:

- “Cada monstro tem que tomar 4 comprimidos e por isso $4 \times 3 = 12$, depois $12 - 4 = 8$ tirámos 4 porque é o número de comprimidos de uma cabeça” (Vaz e Rodrigo);
- “Havia um comprimido no frasco. Não. Faltava um comprimido no frasco e o frasco tinha 11” (David e Matilde);
- “Havia 12 e cada cabeça tomava três, é o que diz o texto” (Janaína e Pisco);
- “Fizemos 4 comprimidos dá para uma cabeça, 8 dá para 2 cabeças e 12 daria para 3 cabeças. Uma não tomou” (Rosa e Joana);
- “Faltava um comprimido para a cabeça do meio. No frasco podia haver 11 faltava um. Ou faltavam dois e o frasco podia ter 10 ou três e o frasco podia ter 9. Não tem que ser 8.” (Andreia e Catarina);
- “Se uma toma 4, a outra toma 8 e a outra 12, então subtraímos 4 e deu 8, uma não tomou” (Ana Carolina e Maria João);
- “Multiplicámos 3 por 4 e deu-nos doze (o que era preciso para as três cabeças tomarem os seus comprimidos) e depois subtraímos 4 porque uma não tomou e deu-nos 8. Por isso o frasco poderia ter 8 comprimidos” (Eva e João);
- “ 4×3 é igual a 12 mais 4 16, podia haver dezasseis - João - mas assim havia para todas e ainda sobravam 4!” (Anne e Mimo); “Somámos 4 mais 4 deu-nos oito, poderia estar qualquer número que não fosse múltiplo de 4, conforme as dores de cabeça” (Daniel e Maria Inês).

Nesta tarefa houve a descoberta de estratégias diferentes e válidas para chegar à resposta. Ficou claro para os alunos, que podem surgir diferentes soluções, que precisam ser comparadas entre si e justificadas em relação à tarefa que as diádes tinham para resolver.

Tarefa 5 – Bolas!!!!

“O desenho serve de recurso de interpretação do problema e como registo da estratégia de solução.” (Smole & Diniz, 2001, p. 127)

Tens 5 bolas vermelhas, cinco bolas amarelas e cinco bolas azuis.

Como é que podes colocá-las dentro desta moldura triangular (figura 5), sem que duas bolas da mesma cor fiquem encostadas uma à outra.

(fonte: casconha2quartoano.files.wordpress.com/2011/01/problemas-da-semana.doc)

O trabalho foi realizado a pares. Argumentos apresentados pelos alunos:

- “Nós pensámos assim: pintámos 5 bolas azuis, 5 vermelhas e 5 bolas amarelas” (Mimo e Cadina);
- “Na primeira bolinha pintei os azuis, nas duas segundas de vermelho, nas terceiras de azul” (Matilde e Ana Carolina).

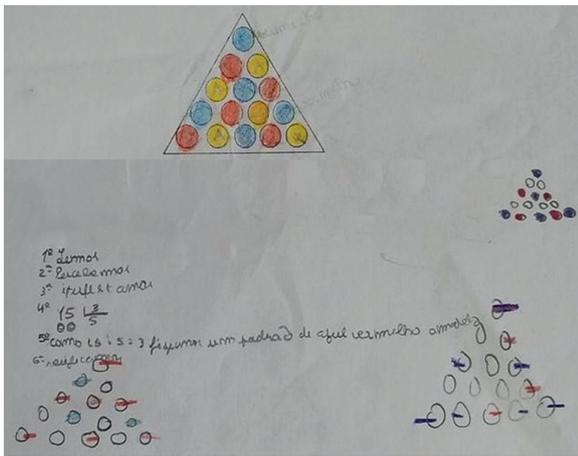


Figura 5. Resolução dos alunos – estratégias

Dificuldade na interpretação/compreensão do enunciado tendo sido fundamental o processo de socialização da aprendizagem, na discussão apresentada. As discussões permitiram analisar várias alternativas, o que se foi tornando essencial para o desenvolvimento das ideias matemáticas, e desenvolvimento da percepção de que as tarefas matemáticas podem não ser tarefas solitárias.

Tarefa 6 – Fotos, fotos e mais fotos

“A oralidade utilizada como recurso na resolução de problemas pode ampliar a compreensão do problema e ser veículo de acesso a outros tipos de raciocínio. Falar e ouvir nas aulas de matemática permite uma maior procura de experiências entre as crianças. Amplia o vocabulário matemático e linguístico do grupo e faz com que ideias e procedimentos sejam compartilhados.” (Smole & Diniz, 2001, p. 126)

Proposta

Se as três amigas quisessem tirar uma foto por cada combinação possível (trocando de lugares), quantas fotografias teriam de tirar? (Podem utilizar as tampinhas coloridas, desenhos, tabelas, esquemas, etc.)

Extensão à proposta

E se às três amigas se tivesse juntado o David, quantas fotografias diferentes podiam eles tirar?



Figura 6. Suporte às propostas - obtidas a partir da atividade “Land art” realizada pela turma

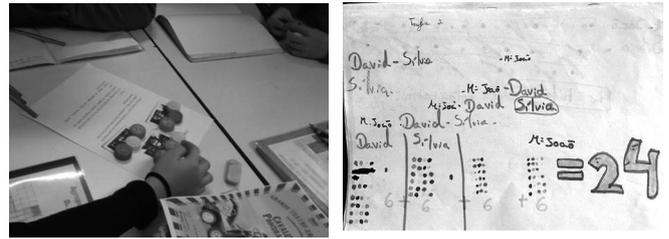


Figura 7. Resolução dos alunos – estratégias

Os alunos recorreram à manipulação de materiais e à elaboração de esquemas para a resolução (figura 7).

A discussão foi feita após a projeção de fotografias tiradas aos registos das estratégias e da respetiva explicação oral.

Esta tarefa, em concreto, permitiu que o processo de discussão ajudasse a que os alunos atribuíssem sentido e significado ao fazer matemático na escola ampliando as capacidades reflexivas deste grupo/turma. A investigação, o diálogo e a reflexão sobre as aprendizagens valorizaram a análise da possibilidade de errar e a construção do conhecimento.

REFLEXÕES FINAIS

A aprendizagem e o ensino da matemática na escola envolve, necessariamente, criar/transformar a sala de aula num espaço “problematizador”. Os alunos devem ser colocados perante desafios onde podem encontrar regularidades, formular, testar, justificar ou refutar hipóteses e ser convidados a refletir e a defender as suas ideias por meio de argumentações e discussões com os seus pares. As rotinas de discussão descentram o fazer matemático do mero domínio de técnicas e exercícios típicos. A partir das atividades propostas, destacaram-se: a leitura e escrita matemática, os procedimentos e metodologias de trabalho bem como as interações.

Raciocinar em matemática, segundo Yakel e Hanna (2003), é uma atividade que o aluno exerce quando resolve problemas matemáticos e é chamado a explicar e a justificar a sua resolução. Os alunos têm a necessidade de explicar para clarificar melhor o seu raciocínio, para validarem as suas ideias tanto para si como para o grupo. Estes, relacionam matematicamente ou não os conhecimentos que já possuem, recorrem a estratégias já aprendidas para que revelem aos outros a forma como raciocinaram.

Independentemente das tarefas propostas, as crianças fazem as suas representações por vezes mais relacionadas com o seu quotidiano e ambiente social do que com aquilo que a escola e a matemática lhes propõe. Como refere Canavarro e Pinto (2012) “as representações idiossincráticas construídas pelos alunos no contexto de tarefas problemáticas podem ajudá-los tanto na compreensão como na própria resolução, constituindo, também, uma forma de registo do método de resolução que

pode ainda possibilitar um meio de o descrever a outras pessoas” (p. 54). Também os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) indicam que os alunos devem «criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas» (p. 160).

Referências

- Boavida, A., & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: contornos e desafios. In A. P. Canavaro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática — Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287–295). Portalegre: SPIEM.
- Canavaro, A.P., & Pinto, M.E. (2012). O raciocínio Matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Revista Quadrante*, vol. XXI (2), 51-79.
- Menezes, L. Ferreira, F., Martinho, M.H, & Guerreiro, A. (2014). Práticas profissionais dos professores de Matemática. In João Pedro Ponte (Org.), *Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática*, (pp. 135-165). Lisboa: Universidade de Lisboa.

- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programas e Metas Curriculares - Matemática - Ensino Básico*. Lisboa: DGE-MEC.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Smole, K. S, & Diniz, M. L. (2001). *Ler escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.
- Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: NCTM.

MARIA EUGÉNIA JESUS - Professora - AGRUPAMENTO DE ESCOLAS D. AFONSO III

HELENA COUTINHO - Aluna de mestrado - ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO, UNIVERSIDADE DO ALGARVE

CONVITE PARA COLABORAÇÃO NA REVISTA N.º 154-155

Este ano, o tema escolhido para o número temático da revista Educação e Matemática, do trimestre outubro/dezembro, último do ano 2019, foi a **Interdisciplinaridade**.

Assim, neste número temático da EeM serão discutidos e refletidos diferentes aspetos do desenvolvimento do trabalho interdisciplinar envolvendo a matemática, no currículo e na escola, dando também uma perspetiva do que se está a fazer neste domínio em Portugal e noutros países. Um dos objetivos principais é a clarificação de como fazer a integração do ensino e aprendizagem da matemática com outras áreas do saber. Pensamos que será pertinente a partilha de experiências

de articulação interdisciplinar da Matemática com outras disciplinas/áreas que compõem o currículo da Educação Pré-Escolar, Ensino Básico e Secundário e formação de professores. Aqui fica o convite para a partilha de experiências ou reflexões sobre este tema. Esperamos o vosso contributo, que pode ter a forma de um artigo sobre um projeto realizado, relato de uma experiência, ponto de vista, etc.

Os textos deverão ser enviados até **15 de setembro de 2019**. Em “Como publicar”, no site da APM, encontram-se as normas práticas a ter em conta.

A REDAÇÃO DA EeM

