Desenvolver o raciocínio funcional no 6.º ano de escolaridade: contributos de uma experiência de ensino

O raciocínio funcional, um dos aspetos centrais do pensamento algébrico, envolve a capacidade para "explorar e generalizar padrões que descrevem relações funcionais" (Blanton & Kaput, 2005). Apesar dos contributos de vários estudos, subsistem aspetos relacionados com a gestão das tarefas e o raciocínio dos alunos, nomeadamente sobre a natureza e progressividade das estratégias, que interessa conhecer com mais pormenor. Importa, portanto, continuar a aprofundar o conhecimento sobre o modo como "uma abordagem algebrizada da aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da álgebra nos anos posteriores" (Canavarro, 2007, p. 91), em particular, na aprendizagem de funções.

No 6.º ano de escolaridade, o trabalho no âmbito dos conteúdos Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta, do domínio Álgebra, é o contexto privilegiado para o desenvolvimento do raciocínio funcional, no ano de escolaridade que antecede o ensino formal de funções. No entanto, as metas de aprendizagem dão indicações diminutas para o ensino-aprendizagem, pelo que compete ao professor a construção de unidades de ensino em que "a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos" (ME, 2013, p.1). Nesse sentido, os documentos curriculares orientadores, como o NCTM (2007), entre outros, constituem um acervo documental especializado que pode ser mobilizado para melhorar a gestão do currículo.

Neste artigo são analisadas as estratégias dos alunos na resolução de tarefas que envolvem padrões de crescimento, no quadro de uma unidade de ensino sobre Sequências e Regularidades. A análise das estratégias revela a importância da visualização no desenvolvimento dos seus próprios processos de generalização. Além disso, a tabela parece ser uma representação facilitadora da exploração na generalização de relações funcionais.

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS PRIMEIROS ANOS DE ESCOLARIDADE

No âmbito da aprendizagem da álgebra, o NCTM (2007) sugere que o currículo deve possibilitar aos alunos: (i) a compreensão de regularidades, relações e funções; (ii) a representação e análise de situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; (iii) a utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (iv) a análise da variação, em diversas situações.

O pensamento algébrico, segundo Kaput (2008), está arreigado na numeracia e na proficiência de cálculo, no raciocínio geométrico e nas capacidades associadas à medida, isto é, a conceitos ensinados nos anos de escolaridade correspondentes ao ensino básico português. Não de trata de ensinar álgebra "elementar" no sentido da manipulação simbólica, mas sim no desenvolvimento de uma forma de pensar. A seu tempo, o pensamento algébrico suporta a capacidade de resolução de problemas, em contextos puramente matemáticos. Blanton (2008) enuncia a aritmética generalizada e o raciocínio funcional, como as vertentes que, em conjunto, sustentam uma compreensão mais abrangente do pensamento algébrico. Para a autora, o pensamento funcional vai além da aritmética generalizada, pois exige ao aluno a capacidade de identificação e análise da relação entre duas ou mais variáveis. Nesse sentido, o desenvolvimento do raciocínio funcional oferece "a oportunidade de trabalhar com um conjunto rico de ferramentas e representações – tabelas, gráficos, máquinas de funções, quadros de input/output, etc." (Mestre & Oliveira, 2011, p. 204). O desenvolvimento do raciocínio funcional deve começar nos primeiros anos de escolaridade e os alunos devem trabalhar de forma gradual com diferentes situações que impliquem a explicitação de regras gerais. Segundo Friel e Mackworth (2009), as "tabelas funcionais" são ferramentas que suportam o desenvolvimento do raciocínio funcional. Apesar destas indicações, escasseiam na literatura episódios que revelem a descrição da agenda didática das tarefas no âmbito de unidades de ensino e do uso de representações, como as "tabelas funcionais".

No que respeita às tarefas, Stacey (1989) diferencia-as em dois tipos de questões, as de generalização próxima e as de generalização distante. As questões de generalização próxima podem ser resolvidas passo-a-passo: (i) por contagem ou desenho; (ii) pelo método da diferença; e (iii) pelo método do objeto inteiro. As questões de generalização distante são aquelas que não podem ser resolvidas a partir de uma abordagem passo-a-passo, o aluno tem de usar uma regra geral. Segundo Vale (2012), conseguimos identificar um padrão naquilo que vemos ou imaginamos que pode acontecer, sendo que num padrão de crescimento o termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Para desenvolver o pensamento algébrico, as tarefas que envolvem padrões têm uma importância significativa, pois os alunos pensam predominantemente de modo visual e são um bom contexto na aprendizagem de conceitos, propriedades e resolução de problemas em matemática (Vale *et al.*, 2009).

EXPERIÊNCIA DE ENSINO

O desenvolvimento de unidades de ensino é uma forma de criar recursos úteis ao professor para introduzir novas formas de trabalho na sua prática letiva. Uma unidade de ensino tem por base uma teoria sobre o modo como os alunos aprendem, ou seja, uma conjetura de ensino-aprendizagem, sendo constituída por um conjunto de tarefas organizadas de modo coerente e apelando ao uso de diversos recursos didáticos. Esta conjetura de ensino-aprendizagem, baseada no currículo e no conhecimento matemático a ensinar, tem uma natureza eminentemente teórica e é refinada ao longo do tempo, através de investigação empírica.

Neste estudo, foi criada uma unidade de ensino, que procura desenvolver a capacidade de raciocínio funcional nos alunos, no âmbito da aprendizagem dos conteúdos Sequências e Regularidades. A unidade de ensino, em particular, a sua conjetura de ensino-aprendizagem, é suportada pela literatura sobre o pensamento algébrico e procura contribuir para uma transição gradual para a álgebra, enquanto manipulação simbólica, com compreensão. De fato, procura ser uma unidade de ensino que ajude os alunos na transição entre as estratégias informais ou as por recorrência e a descrição de uma relação funcional. A unidade de ensino, desenvolvida ao longo de 6 aulas, é constituída por 7 tarefas diversificadas, nomeadamente explorações e problemas, que envolvem a utilização de material manipulável e/ou a representação pictórica. A tarefa 1 da unidade de ensino, que pede aos alunos a construção de alguns termos de várias sequências, com cubos de encaixe coloridos, dados os primeiros dois ou três termos. Na resolução dessa tarefa são representados, no papel quadriculado, os termos construídos com os cubos. Na resolução da tarefa 2 da unidade de ensino, essas representações são o suporte visual na determinação da expressão geradora. Na resolução da tarefa 3 foi explorada, em grupo, um padrão do tipo n+a.

As tarefas que envolvem padrões de crescimento são limitadas no que respeita à exploração de relação funcional (são usados apenas números positivos; a relação não é continua), contudo este contexto restrito e simplificado, facilita o estabelecimento de relações entre variáveis.

O estudo segue uma abordagem metodológica de design research, pois o objetivo é analisar a aprendizagem no seu contexto, estudando de modo sistemático formas particulares de aprendizagem e estratégias de resolução dos alunos. O estudo foi desenvolvido numa escola básica do 2.º e 3.º ciclos de escolaridade da periferia da cidade de Lisboa. Os dados apresentados neste artigo dizem respeito ao segundo ciclo de experimentação, durante o ano letivo 2017/18, numa turma do 6.º ano com vinte e quatro alunos – dez raparigas e catorze rapazes. Como forma de preservar a identidade dos alunos, os nomes usados neste artigo são fictícios. A recolha documental (registos dos alunos) e a observação participante (diário de bordo; gravação áudio) foram as principais técnicas de recolha de dados.

"VER" UMA EXPRESSÃO GERADORA DE UM PADRÃO – MOMENTOS DE UMA AULA

Nesta seção são apresentadas as respostas dos alunos a quatro questões da tarefa 4, que apresenta um padrão de crescimento do tipo an+b. As respostas são acompanhadas de alguns momentos da aula, no sentido de clarificar o seu próprio desenvolvimento, assim como o modo como os alunos pensam durante a resolução da tarefa. Finalmente será feita uma breve análise das respostas dos alunos tendo em consideração aspetos do pensamento algébrico, em particular, o raciocínio funcional.

Na aula, antes da distribuição da folha com a tarefa, a professora comunicou aos alunos que tinham vinte minutos para a resolver individualmente e que o tempo restante seria destinado à sua discussão, em grande grupo. Também informou que a resolução individual seria entregue no final da aula e que os registos/síntese da discussão deveriam ser registados no caderno diário. Os alunos começaram a resolver a tarefa e a professora dedicou algum tempo a acompanhar dois alunos com dificuldades de aprendizagem.

A primeira questão da tarefa pede o desenho dos quarto e quinto termos da sequência e todos os alunos respondem corretamente. Alguns alunos, como Lucas, mobilizam a sua experiência anterior antevendo a resolução das questões mais complexas.

Lucas: Professora, posso pintar como fizemos nas outras aulas?

Professora: Podes, mas… Espera um pouco que já vou aí. Podes começar como quiseres, mas repara que a primeira questão pede apenas para desenhares as duas figuras seguintes.

Lucas: Sim, eu já fiz! Eu vejo assim (com a mão faz um gesto que descreve uma linha horizontal). Eu acho que tem uma fila [de círculos] em cima e uma fila [de círculos] em baixo. De uma figura para outra é mais um círculo em baixo e mais um em cima, dois. (…) Vou pintar os de cima e os debaixo com cores diferentes (figura 1), para fazer isto aqui da expressão.

Figura 1. Registo de Lucas, questão 1.1

Todos os alunos responderam corretamente à questão 1.2, pois dezasseis é o número de círculos do sétimo termo da sequência e enunciaram uma lei de formação para a sequência, na resposta à questão 1.3. Destas, a mais frequente é a que indica que o número de círculos de um termo decorre do número de círculos do termo anterior (figura 2).

1.3 Indica uma lei de formação para a sequência.

A lei de formação para a sequência é ir acrescentando mais dois círculos ao termo anterior.

1.3 Indica uma lei de formação para a sequência.

La figura um quatro círculos a seguinte figura tem mais dois e assim sucessivamente vai se acrescentando dois ao termo seguinte

Figura 2. Registos de Lúcia e de Paulo, questão 1.3

Durante a discussão da tarefa, Lucas revelou ter escrito a sua lei de formação depois de "descobrir" a sua expressão geradora (figura 3). Questionado sobre o motivo da alteração da ordem das respostas às questões, diz que a expressão geradora é "o mais importante, porque estamos a aprender agora (…) não sei explicar bem, mas é o que dá para saber de toda a sequência".

Duplicar o nº do termo e acrescentar 2.

Figura 3. Registo de Lucas, questão 1.3

A revelação de Lucas mostra que o aluno não segue a ordem das questões e vai tomando decisões de acordo com a sua experiência e com o que considera ser relevante e robusto, do ponto de vista matemático.

Dezanove dos vinte e quatro alunos da turma escreveram uma expressão geradora adequada da sequência. Destes, cerca de metade apresentou os termos da sequência pintados, como mostra a figura 1 e uma tabela semelhante à de Lucas (figura 4).

Nº termo	Nº ●	Nº ●	Nº total
1	2	2	2+2=4
2	3	3	3+3=6
3	4	4	4+4=8
…			
N	N+1	N+1	~~N~~ NX2+2

verde
vermelho

expressão geradora = NX2+2

Figura 4. Registo de Lucas, questão 1.3

Talvez, por se tratar de uma situação simples, Lucas indicou apenas o número de círculos, de cada cor, para cada termo. Aparentemente não está a explorar qualquer relação entre o número de círculos e o número do termo, mas na última linha mostra que está a considerar essa relação funcional entre o número da figura e o número de círculos de cada cor.

Nove alunos pintaram os termos da sequência como Rui (figura 5), revelando um olhar mais estruturado, talvez considerem intuitivamente o número do termo.

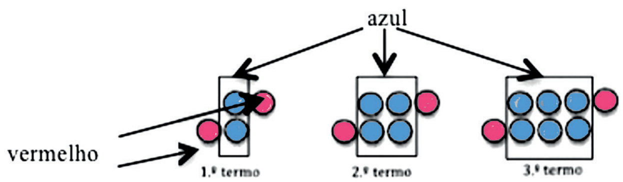

Figura 5. Registo de Rui

Durante a discussão da tarefa, dois destes alunos referiram:

Miriam: Eu vi um "S", aumenta no meio com mais dois, dois, dois… [Círculos] aos pares tem de ser o dobro, par é dois. Ficam os outros, um e um. (…) Oh! Já me lembro, quando estava a ver os do meio, era um, um, depois, dois, dois e três, três e quatro, quatro… Oh! Era o número dos termos.

Rui: Eu vi que tinha uma parte central e que era igual em cima e em baixo, então era sempre duas vezes. (…) Ficavam sempre dois nas pontas, pintei de vermelho. (…) Quando fui ver o que se passa aqui, na tabela (figura 6), é que vi que era duas vezes o número do termo.

nº do termo	nº de círculos ●	nº de círculos ●	nº total de círculos
1	2=2x1	2	2x1+2
2	4=2x2	2	2x2+2
3	6=2x3	2	2x3+2
4	8=2x4	2	2x4+2
5	10=2x5	2	2x5+2
n	2xn	2	2xn+2

azul
vermelho

Figura 6. Registo de Rui, questão 1.4

Os registos dos alunos e as explicações orais mostram que pintaram os termos da sequência de acordo com o padrão que visualizam. Para determinar a expressão geradora, mobilizam o padrão e a informação numérica é colocada na tabela de acordo com o jogo de cores. Na exploração numérica, estão presentes aspetos identificados previamente, como referem Miriam e Rui, sobre o dobro de círculos azuis. As expressões geradoras foram escritas pelos alunos, sem qualquer indicação da professora, e na discussão coletiva foram comparadas e redigidas na forma de 2n+2 (síntese no caderno diário).

Os cinco alunos, que não escreveram corretamente a expressão geradora, indicaram 2n e 3n na sua resposta. Durante a discussão da tarefa, a expressão 2n foi associada ao acréscimo de dois círculos entre os termos e a expressão 3n foi indicada após a verificação que 2n não é a expressão geradora da sequência. Estes alunos revelaram alguma relutância em pintar o modo como visualizam o padrão, talvez por pensarem ser um processo moroso, preferindo usar uma estratégia por tentativa e erro.

Concluindo, a análise dos registos escritos e das intervenções orais na aula mostram que os alunos reconhecem a estrutura do padrão da sequência e revelam ter capacidade de generalização próxima. De facto, todos responderam corretamente quer às questões 1.1 e 1.2 que dizem respeito a termos iniciais da sequência, quer à questão 1.3 enunciando, na sua maioria, uma lei de formação na qual emerge o método da diferença. No entanto, os registos escritos de alguns alunos mostram respostas pouco claras, como a de Paulo, porque não leem as frases que redigem. Esta situação compromete a qualidade da resposta, pelo que será alvo de análise tendo em vista o refinamento da unidade de ensino, antes do terceiro ciclo de experimentação.

A maioria dos alunos revela também capacidade de generalização distante, pois na resposta à questão 1.4, determina uma regra geral. Em alguns registos efetuados nas tabelas são evidentes os aspetos do pensamento relacional descrito por Jacobs et al. (2007), no que respeita ao uso do sinal igual como indicador de construção de relações gerais explícitas. É de salientar que a determinação da expressão geradora (regra geral) se apresenta, no percurso de aprendizagem dos alunos nesta unidade de ensino, como um processo diferenciado: (i) decorre do modo como cada aluno visualiza o padrão; (ii) do conhecimento matemático que mobilizam intuitivamente; e (iii) da capacidade em estabelecer relações numéricas entre o número do termo e o número de círculos, isto é, como descrevem relações funcionais. Além disso, os alunos relevam usar os símbolos numéricos e não numéricos com sentido, quando efetuam a adição das expressões parciais associadas à cor para determinar uma expressão geradora da sequência.

Considerações finais

As tarefas com padrões de crescimento são um contexto privilegiado para desenvolver o pensamento algébrico nos alunos. Sempre que este tipo de tarefas é revisitado ao longo da escolaridade, os seus objetivos devem mobilizar o conhecimento prévio dos alunos e desenvolver estratégias cada vez mais sofisticadas, isto é, estabelecer a passagem gradual e com compreensão entre o concreto/pictórico e o abstrato. Neste sentido, tendo em consideração a experiência prévia dos alunos no 1.º ciclo, o trabalho com padrões de crescimento no 6.º ano de escolaridade deve ter foco no raciocínio funcional, mobilizando a visualização, na determinação com compreensão de uma lei de formação e de uma expressão geradora.

A maioria dos alunos revelou ser capaz de escrever uma lei de formação e uma expressão geradora da sequência com padrão, do tipo an+b. Os alunos revelaram uma forte tendência para usar o método da diferença para enunciar a lei de formação, provavelmente como resultado da sua experiência no 1.º ciclo. Contudo, para determinar a expressão geradora exploram regularidades, tendo em consideração o modo como cada aluno visualiza o padrão, isto é, como pintaram as figuras da sequência. A tabela e a forma como foi explorada revelam, do ponto de vista numérico, como olham os alunos para o padrão no processo de exploração da relação funcional.

Referências

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom*. Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412–446.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Friel, S. N. & Markworth, K. A. (2009). A framework for analysing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 24–33.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Jacobs, V. R., Franke, N. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 258-288.

ME (2013). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2011). O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de Alunos do 3.o ano de escolaridade do ensino básico. In C. Guimarães & P. Reis (Org.) *Professores e Infâncias: estudos e experiências* (pp. 201-223). São Paulo: Junqueira & Marin Editores.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trad). Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática: propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESEVC.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos. *Interacções, 20*, 181-207.

Ana Isabel Silvestre

Agrupamento de Escolas de Casquilhos, Barreiro