Um passeio pela cidade

António Bernardes

Os passeios pelas cidades sempre foram grandes inspiradores de problemas matemáticos. A maior parte desses passeios "matemáticos" têm por cenário cidades bem ordenadas, mais ou menos imaginárias, que, curiosamente, fazem lembrar a baixa lisboeta, com a sua rede de ruas paralelas e perpendiculares.

A quadrícula tem sido o lugar privilegiado para essas caminhadas, obrigando a horas de viagem nos limites duma folha de papel. O espaço é pequeno, mas o prazer de resolver esses problemas pode ser grande.

Os desafios que aqui proponho são três exemplos desse tipo de passeios problemáticos ligados a trajectos em cidades urbanisticamente "perfeitas". Eles convidam-nos a fazer a caminhada até ao fim e aliciam-nos para a descoberta do caminho mais curto ou matematicamente mais perfeito.

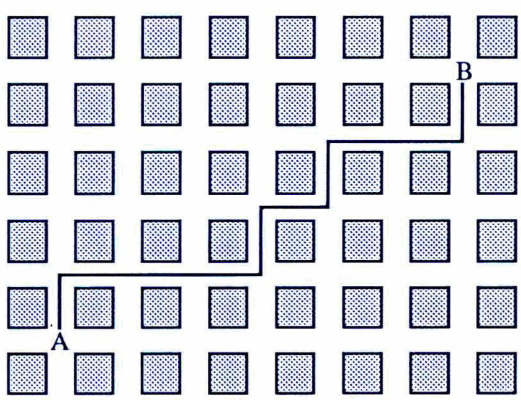
Contudo, a associação destes problemas não obedece apenas ao facto de se desenrolarem no mesmo tipo de cidade. Eles permitem evidenciar dois aspectos a que podemos estar atentos quando resolvemos problemas. Por um lado, a conveniência de procurar reconhecer, num conjunto de problemas, a presença de semelhanças significativas. Por outro, a importância de saber identificar diferenças entre problemas aparentemente semelhantes.

Os dois primeiros problemas, por sinal bastante conhecidos, ilustram bem o primeiro aspecto. O terceiro, superficialmente semelhante aos anteriores, aponta para caminhos matemáticos e estratégias de resolução muito diversas.

Sem querer fazer concorrência à secção *Problema do Trimestre* aqui ficam os três desafios. Para os dois primeiros não são apresentadas, obviamente, sugestões de exploração. A resolução do problema "Uma volta pela cidade" fica propositadamente em aberto... para quem a queira continuar.

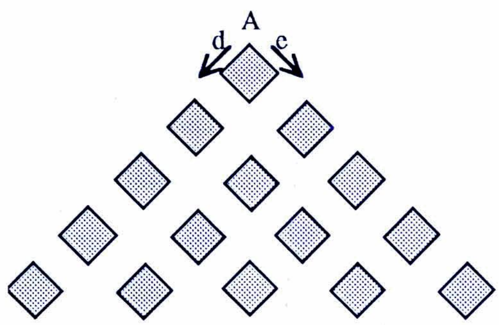
Os caminhos

Quantos trajectos diferentes existem para uma pessoa ir do cruzamento A para a esquina B, sabendo que em cada intersecção pode escolher seguir para Norte ou para Este?



Os cruzamentos

Do ponto A, cruzamento de uma rede de caminhos, partem 2^{1000} homens, metade no sentido indicado por $\vec{d}$ e metade no sentido de $\vec{e}$.



O movimento continua de tal forma que qualquer grupo que chegue a um cruzamento se divide sempre em dois novos grupos iguais, seguindo um no sentido $\vec{d}$, o outro no sentido $\vec{e}$.

Qual será o número de homens que chega a cada um dos cruzamentos da milésima fila?

Convém talvez esclarecer que teremos que designar a fila 0 como aquela que contém o cruzamento A, a fila 1 a que contém dois cruzamentos, a fila 2 a que tem três, e assim sucessivamente.

Uma volta pela cidade

Imagine-se numa grande cidade desconhecida, cheio de vontade de passear a pé. Imagine também que as ruas dessa cidade formam uma grelha de quadrados, o que é conveniente para a investigação que lhe vou propor.

E, imagine ainda que, antes de começar o seu passeio turístico decidiu:

- Após andar um quarteirão, virar à direita ou à esquerda.
- Depois, andar dois quarteirões, e virar em seguida à direita ou à esquerda.
- Depois, andar três quarteirões e, é evidente, virar à direita ou à esquerda.
- E assim sucessivamente ...

Ao seguir esta regra, cada vez que muda de direcção anda sempre mais um quarteirão que no troço anterior.

Se está com medo de se perder, pegue numa folha de papel quadriculado e simule o trajecto. Se observar o mapa verá que tem hipóteses de voltar ao ponto de partida.

Este trajecto é composto por oito troços, todos diferentes. Sempre que conseguir obter um caminho como este, ou seja, voltar ao ponto de partida de acordo com as regras estabelecidas, terá acabado de construir um *golígono*.

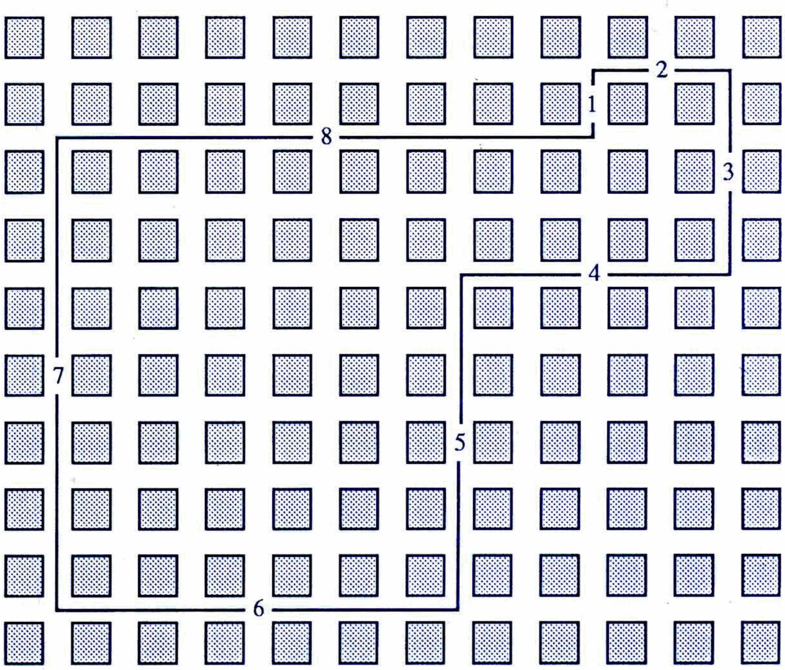
Bom, um golígono, se quisermos defini-lo, é uma linha fechada composta por segmentos de recta, perpendiculares dois a dois, cujas medidas dos comprimentos são representadas por uma sequência finita de n números inteiros consecutivos, de 1 a n. Os lados de um golígono podem intersectar-se.

O desafio é o seguinte:

Descubra que tipo de golígonos é possível construir.

Se não lhe apetecer andar a pé, pegue numa folha e divirta-se. Para não fique a pensar que lhe quero estragar as férias aqui vão algumas pistas.

Em primeiro lugar, e voltando à cidade, iniciemos um passeio dirigindo-nos para Norte. Assim, o primeiro percurso, para Norte, terá o comprimento de 1 quarteirão. Voltando à direita ou à esquerda, seguiremos para Este ou Oeste durante 2 quarteirões, e assim sucessivamente, fazendo por voltar ao ponto de partida e construir um golígono. Deste modo, todos os lados impares do golígono (o primeiro, o terceiro, o



Um golígono com oito lados

quinto,...) medirão um número ímpar de quarteirões e estarão dirigidos para Norte ou para Sul, e todos os lados pares do golígono (o segundo, o quarto,...) medirão um número par de quarteirões e estarão dirigidos para Este ou Oeste. Como o último lado tem que encontrar o primeiro, no ponto de partida, segundo um ângulo recto, então o último lado está apontado para Este ou Oeste. O último lado, então, é um lado par do golígono, e portanto o número de lados do golígono tem que ser múltiplo de dois.

Mas é fácil verificar que é impossível construir um golígono com 2, 4 ou 6 lados. O primeiro que conseguimos construir é o que está representado na figura e tem oito lados. Com que número de lados será afinal possível desenhar um golígono?

Sabemos que para voltar ao ponto de partida, a distância percorrida para Norte tem que ser igual à distância percorrida para Sul, e da mesma forma para Este e Oeste. Associemos sinais contrários aos deslocamentos com sentidos opostos. Para o exemplo dado:

Para Norte: +1 e +7.
Para Sul: -3 e -5.
Para Este: +2 e +8.
Para Oeste: -4 e -6.

Seguindo esta regra, para que seja possível voltar ao ponto de partida, a soma dos deslocamentos Norte e Sul tem que ser igual a zero, bem como a soma dos deslocamentos Este e Oeste. Voltando ainda ao exemplo dado:

+1-3-5+7=0
+2-4-6+8=0

Mas para que a soma seja zero o número de lados (Norte e Sul) tem que ser par (a soma de um número par de impares é sempre par e soma de um número ímpar de impares é sempre ímpar). Então, o número total de lados do golígono é múltiplo de quatro, já que é sempre o dobro do número de lados Norte e Sul.

Mas não há golígonos com quatro lados!

Então que tipo de golígonos é possível construir?

Existem muitos, mas mesmo muitos.

Bom passeio!

Notas:

1) O problema "Os cruzamentos" foi proposto aos participantes do oitavo concurso matemático de Moscovo em 1945.

2) A aparição dos golígonos deve-se ao engenheiro Lee Sallows, da Universidade Católica de Nijmegen, na Holanda, que iniciou as suas investigações sobre este assunto em 1988.

Bibliografia:

Dewdney, A. K. (1990). An odd journey along even roads leads to home in Golygon City. *Scientific American*, Vol. 263, Nº 1. New York: Scientific American Inc.

Jacobs, H. R. (1982). *Mathematics, A Human Endeavor*. New York: W. H. Freeman and Company.

Uspensky, V. (1984). *O triângulo de Pascal*. Moscovo: Editora MIR.

António Bernardes
Projecto MINERVA, DEFCUL

Materiais para a aula de Matemática

A ficha de trabalho proposta foi concebida para ser utilizada por alunos do 10º ano a propósito do estudo da Trigonometria. Ela fez parte de um conjunto de materiais destinados a promover uma nova abordagem dos conceitos de Trigonometria ao longo de uma experiência levada a efeito na Escola Secundária de Rio de Mouro, com duas turmas do 10º ano, no 3º período lectivo de 90/91. No entanto, por falta de tempo, não chegou a ser experimentada com os alunos. Neste projecto, presidiram diversas intenções, entre as quais se destacam a exploração de situações reais capazes de permitirem a manipulação de modelos matemáticos, a sua interpretação e avaliação, no sentido de desenvolver novas formas de aprender e fazer Matemática, fomentando, por seu turno, a construção e amplificação de modelos conceptuais nos alunos.

A folha de cálculo constituiu um instrumento privilegiado na realização das actividades propostas, tornando possível a experimentação, a análise gráfica, a integração de múltipos dados, todos estes, factores de capital importância no processo de modelação.

Embora nesta actividade se sugira, a certa altura, a utilização da folha de cálculo, ela não é indispensável e poderá eventualmente ser substituida por um programa de funções. O que, em suma, se torna determinante nesta actividade é a capacidade de interpretação de gráficos e a descoberta de que certas funções trigonométricas mais complexas podem ser geradas pela simples soma de funções já bem conhecidas.

Referência Bibliográfica

Boulton, J. (1979). *Basics steps in astronomy*. Dorset: Blandford Press

Susana Carreira