Resolução de equações do 2.º grau com o *Algebra Tiles*: uma experiência no 8.º ano de escolaridade

PAULO FERREIRA CORREIA

ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA COM O *ALGEBRA TILES*

Na opinião de Leitze e Kitt (2000) a álgebra é realmente possível para todos. Contudo, muitos estudantes tentam aprender álgebra recorrendo essencialmente à memorização e muitos professores usam métodos que incentivam esse comportamento.

Durante o processo de aprendizagem, os alunos enfrentam erros e dificuldades que devem ser observados atentamente pelo professor, com o propósito de encontrar procedimentos que os ajudem a ultrapassar as dificuldades com que se vão deparando e os erros que vão emergindo. "Pensar a escola na contemporaneidade é lidar com crianças inquietas, menos propensas a ouvir por muito tempo, mas ao mesmo tempo, mais aguçadas ao uso das tecnologias recentes …» (Neta, 2012, citado em Neta & Silva, 2014, p. 73).

Numa intervenção de ensino com recurso ao *Algebra Tiles*, construído em cartolina, envolvendo uma turma do 8.º ano de escolaridade, Teixeira (2012) concluiu que de entre os materiais utilizados, na intervenção de ensino, o *Algebra Tiles* foi o material preferido por todos os alunos, considerando-o divertido e eficaz; com o passar do tempo os alunos abandonaram o material, para passarem a fazer apenas os esboços no papel; esta ferramenta motivou os alunos para a aprendizagem dos conteúdos; os esquemas apoiaram a aprendizagem dos casos notáveis da multiplicação de polinómios, com compreensão, ajudando ainda a desmontar o erro tão comum de considerar a igualdade $(a+b)^2=a^2+b^2$; a estratégia revelou muito potencial na simplificação da fatorização de polinómios do segundo grau com uma variável.

DESCRIÇÃO DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Reconhecendo o potencial educativo do GeoGebra, dos *applets* e dos dispositivos móveis no ensino e na aprendizagem da resolução de equações do 2.º grau, implementou-se uma intervenção de ensino apoiada neste *software* e no telemóvel. A sua implementação decorreu no primeiro período do ano letivo 2017/2018, em duas turmas do 8.º ano de escolaridade de uma escola secundária com 3.º ciclo do concelho de Barcelos.

Recorreu-se ao GeoGebra para construir um *applet* do *Algebra Tiles* (https://ggbm.at/rtEKC7QH). Depois de construído, foi disponibilizado aos alunos para ser utilizado no telemóvel. A versão livre de GeoGebra para telemóvel constituiu uma ferramenta essencial para a implementação da intervenção de ensino, ao estar acessível a todos os alunos, que puderam explorar o *applet*, por sua iniciativa, tanto dentro como fora da sala de aula.

Neste estudo, o *Algebra Tiles* apresenta-se como uma estratégia possível na resolução de equações do 2.º grau, alternativa ou complementar do procedimento de "resolução de equações de 2.º grau tirando partido da lei do anulamento do produto" (Programa e metas curriculares de matemática para o ensino básico, p. 23).

As tarefas foram realizadas num ambiente de sala de aula favorável à experimentação, à partilha de ideias e à liberdade de escolha da melhor estratégia de resolução dos exercícios propostos. Os alunos foram distribuídos por grupos de trabalho e podiam recorrer ao telemóvel, ao tablet ou computador portátil, para utilizarem o *applet* construído em GeoGebra, pelo professor de matemática, especificamente para a intervenção de ensino.

A intervenção decorreu em 12 aulas de 90 minutos, sendo que, aquando da correção dos exercícios no quadro, o *Algebra Tiles* era integrado num processo de resolução, sempre que estavam envolvidos binómios do primeiro grau e polinómios do 2.º grau numa variável: uma aula destinada à multiplicação de binómios, com o principal objetivo de os alunos se familiarizarem com o *applet*; duas aulas para os casos notáveis da multiplicação de polinómios; duas aulas para a fatorização de polinómios; quatro aulas para a resolução de equações do 2.º grau com uma incógnita; três aulas de consolidação das aprendizagens e resolução de problemas.

As tiras utilizadas no *Algebra Tiles* consistem em quadrados pequenos, quadrados grandes e retângulos de largura igual à medida do lado dos quadrados pequenos e comprimento igual à medida do lado dos quadrados grandes, construídos em duas cores; por exemplo, azul para representar o sinal positivo e vermelho para representar o negativo, conforme se apresenta na figura 1.

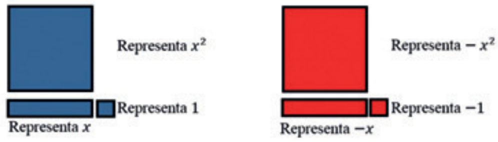

Figura 1. Tiras do Álgebra Tiles

A título de exemplo, a equação x^2+4x+4 pode ser resolvida com o apoio da composição em *Algebra Tiles* que se pode ver no telemóvel do aluno, na figura 2.

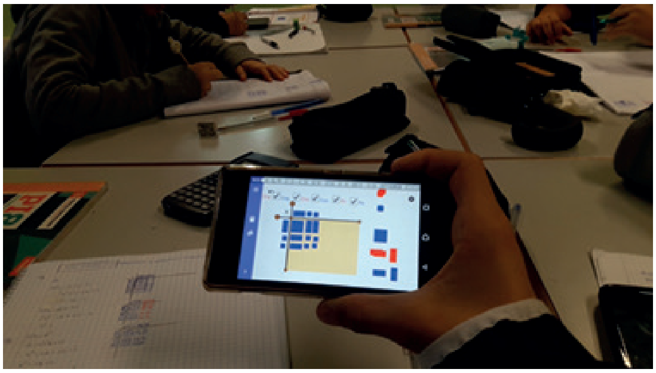

Figura 2. Fotografia de um momento de aula

Uma vez que o segundo membro da equação já é zero, o aluno começou por preencher o centro da tabela com as tiras algébricas coloridas, por forma a obter um retângulo, sendo que o retângulo de tiras justapostas terá que representar a expressão $x^2+x+x+x+x+1+1+1+1+1$, uma vez que o primeiro membro da equação é x^2+4x+4. Motivo pelo qual o aluno considerou um quadrado azul grande (x^2) quatro retângulos azuis ($4x$) e quatro quadrados azuis pequenos (4).

Nas duas entradas da tabela, o aluno colocou as tiras algébricas referentes a cada um dos fatores correspondentes à fatorização do primeiro membro da equação, recorrendo a retângulos e a quadrados pequenos. Assim, na entrada vertical o aluno colocou um retângulo seguido de dois quadrados, na entrada horizontal um retângulo seguido de dois quadrados e preencheu o quadro atendendo às regras dos sinais da multiplicação. Desta forma, o aluno obteve a fatorização $(x+2)(x+2)$, mas poderia ter considerado apenas representações negativas (tiras vermelhas) obtendo a expressão equivalente $(-x-2)(-x-2)$. Obtida a fatorização, a equação $(x+2)(x+2)=0$ é equivalente à equação inicial e fica resolvida por aplicação da lei do anulamento do produto.

As equações consideradas nas aulas foram do tipo dos exemplos da página 86 do caderno de apoio, complementar ao documento Metas Curriculares de Matemática para o 3.º ciclo do Ensino Básico.

ANÁLISE DAS PRODUÇÕES DOS ALUNOS EM DUAS FICHAS DE AVALIAÇÃO

Nos exemplos trabalhados, no grupo turma, foram sempre explorados vários processos e, aquando da resolução dos exercícios propostos, os alunos eram totalmente livres para escolher o processo de resolução. No quadro eram sempre apresentados pelos alunos todos os métodos de resolução obtidos em trabalho de grupo.

Os alunos recorreram ao *Algebra Tiles* para fatorizar polinómios do 2.º grau com uma variável, desenvolver o quadrado do binómio, multiplicar binómios e verificar o resultado obtido por outro processo de resolução (ver figura 3).

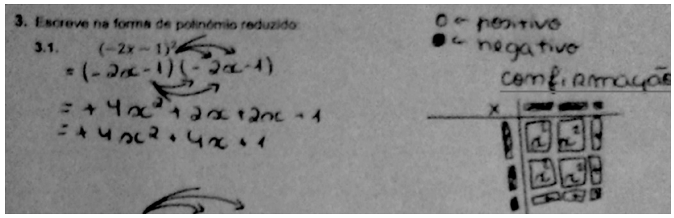

Figura 3. Confirmação da resolução com o *Algebra Tiles*

Na Tabela 1, relativamente a duas fichas de avaliação aplicadas aos alunos, apresenta-se uma análise da utilização do *Álgebra Tiles* na resolução dos exercícios das fichas de avaliação, passíveis da sua aplicação.

Tabela 1. Utilização do *Algebra Tiles* nas fichas de avaliação.

Identificação das fichas de avaliação	Conteúdos	Utilização do *Algebra Tiles* (%)
1.ª ficha de avaliação do 1.º período (332 respostas)	Escrita na forma de polinómio reduzido	0,3
	Fatorização de polinómios	14,7
	Resolução de equações	12,0
	Total	**27,0**
1.ª ficha de avaliação do 2.º período (88 respostas)	Resolução de equações	18,2

Em relação à primeira ficha de avaliação foram analisadas três questões. Na primeira questão analisada pedia-se aos alunos para escreverem na forma de polinómio reduzido as expressões: $(x+1)(x+1)$; $(-2x-1)(2x+2)$; $(-2x+2)^2$; $(-2x-1)^2$.

Na segunda questão analisada pedia-se aos alunos para fatorizar os seguintes polinómios: $-3x^2-6x$; x^2+2x+1; $4x^2-4x+1$; $2x^2-6x$.

Na terceira questão pedia-se para resolver as seguintes equações: $2+x^2=6$; $-2x^2+6x=0$; $4x^2+4x+1=0$; $-6+(x-1)^2=-2$; $x^2-4x=0$.

Relativamente à segunda ficha de avaliação, foi analisada uma única questão, com duas alíneas, na qual se pedia aos alunos para resolverem as seguintes equações: $(-x-2)^2-36=0$; $(2x-8)^2=4$.

Analisadas as produções dos alunos, conclui-se que, a dada altura do ano letivo, os alunos já não tinham necessidade de completar o quadro do *Algebra Tiles* para escrever uma fatorização correta do polinómio. Por exemplo, na resolução da figura 4 o aluno não coloca o símbolo " –" em quatro retângulos, mas escreve corretamente o termo . Por vezes os alunos desenhavam apenas alguns retângulos para ajudar a efetuar uma representação mental da situação.

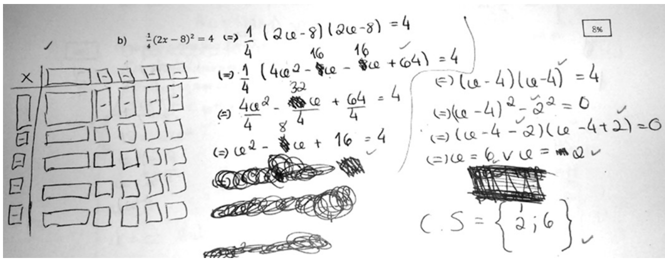

Figura 4. Resolução apresentada por um aluno

Recorrendo apenas a processos tradicionais, a equação apresentada na figura 4 pode ser resolvida recorrendo aos casos notáveis da multiplicação de polinómios, nomeadamente a diferença de quadrados, isto é,

$$\frac{1}{4}(2x-8)^2=4 \Leftrightarrow \frac{(2x-8)^2}{4}=\frac{16}{4}=(2x-8)^2=16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x-8)^2-16=0 \Leftrightarrow (2x-8-4)(2x-8+4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-8-4=0 \text{ v } 2x-8+4=0 \Leftrightarrow 2x=12 \text{ v } 2x=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=6 \text{ v } x=2.$$

Em alternativa, o aluno poderia transformar a equação dada numa equação do tipo $x^2=k$, ou seja,

$$\frac{1}{4}(2x-8)^2=4 \Leftrightarrow \frac{(2x-8)^2}{4}=\frac{16}{4}=(2x-8)^2=16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x-8)^2=16 \Leftrightarrow 2x-8=4 \text{ v } 2x-8=-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=12 \text{ v } 2x=4 \Leftrightarrow x=6 \text{ v } x=2.$$

Contudo, o aluno (ver figura 4) decidiu começar por desenvolver o quadrado do binómio, chegando à equação $x^2-8x+16=4$. Em alternativa à escrita de uma fatorização do primeiro membro por aplicação do quadrado do binómio, recorre ao *Algebra Tiles* para obter a equação equivalente $(x-4)^2=4$.

Se o aluno subtraísse 4 a ambos os membros da equação obteria a equação equivalente $x^2-8x+12=0$. Ora, a fórmula resolvente só faz parte do programa de matemática para o 9.º ano de escolaridade. Nestas situações, ao perceberem que não podiam aplicar nenhum dos casos notáveis, os alunos recorreram, naturalmente, ao *Algebra Tiles*, para obterem as duas soluções reais distintas (ver figura 5).

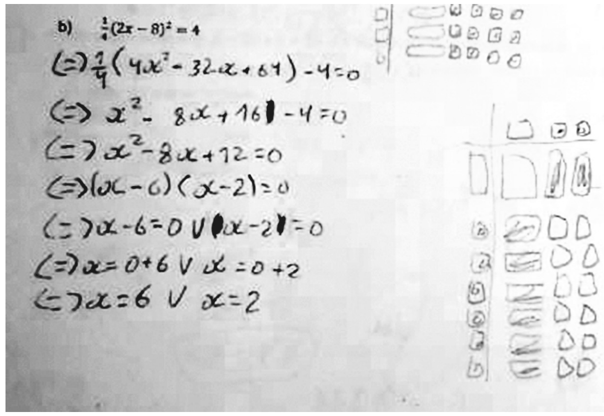

Figura 5. Resolução de uma equação do 2.º grau completa com duas soluções reais distintas

Na Tabela 2 efetua-se a distribuição das resoluções obtidas pelos alunos com recurso ao *Algebra Tiles* (ver figura 5): Incorretas (I), sempre que o aluno obteve zero pontos nessa questão; Corretas (C), sempre que o aluno obteve a totalidade dos pontos atribuídos a essa questão; Parcialmente Corretas do tipo 1 (PC1), sempre que o *Algebra Tiles* conduziu a uma fatorização correta e o aluno não obteve a pontuação total atribuída à questão; ou Parcialmente Correta do tipo 2 (PC2), sempre que o *Algebra Tiles* conduziu a uma fatorização incorreta e o aluno obteve cotação noutras etapas da resolução da questão.

Tabela 2. Distribuição das resoluções dos alunos com *Algebra Tiles.*

Identificação das fichas de avaliação	Conteúdos	Tipo de resolução (%)			
		C	PC1	PC2	I
1.ª ficha de avaliação do 1.º período (90 respostas)	Escrita na forma de polinómio reduzido	1,1	0	0	0
	Fatorização de polinómios	43,3	2,2	3,3	5,6
	Resolução de equações	32,2	5,6	5,6	1,1
	Total	**77**	**8**	**9**	**6**
1.ª ficha de avaliação do 2.º período (16 respostas)	Resolução de equações	56	25	19	0

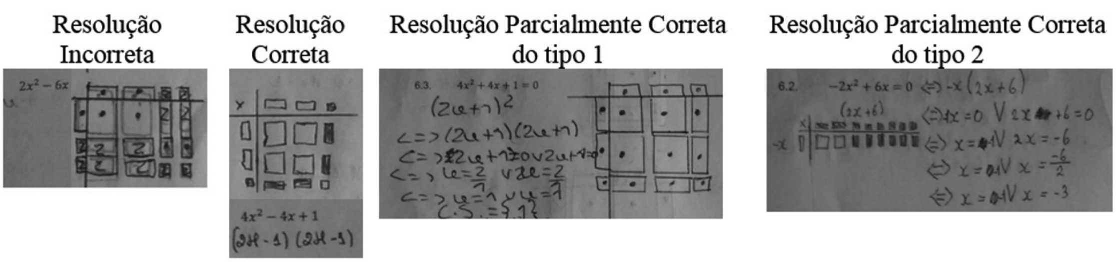

Figura 6. Caracterização das resoluções dos alunos

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a intervenção de ensino tirou-se o máximo proveito do *software* e do telemóvel na motivação para a aprendizagem dos diferentes conteúdos envolvidos, nomeadamente: fatorização de polinómios do 2.º grau numa variável; lei do anulamento do produto; casos notáveis da multiplicação de polinómios; multiplicação de polinómios; e resolução de equações do 2.º grau. O recurso a estas ferramentas revelou-se uma excelente estratégia na promoção de uma atitude positiva em relação à matemática, dado o envolvimento da grande maioria dos alunos na realização das tarefas propostas.

A combinação da metodologia de trabalho de grupo, com os dispositivos móveis e o *applet* construído com o *software* GeoGebra revelou-se bastante eficaz na motivação dos alunos para a aprendizagem do tópico em estudo, promoveu a discussão e a partilha de ideias e favoreceu a consolidação das aprendizagens.

Terminada a intervenção de ensino, concluiu-se sobre a eficácia da estratégia como uma excelente alternativa aos processos tradicionais de resolução de equações do 2.º grau (completas e incompletas) com uma incógnita, ou mesmo na verificação da resolução efetuada recorrendo a outros processos de resolução. Também se revelou uma ótima estratégia de motivação ao nível do trabalho autónomo fora da sala de aula.

Na intervenção de ensino destacaram-se as discussões, nos grupos de trabalho, desencadeadas pelas diferentes fatorizações obtidas, com o *Algebra Tiles*, para o mesmo polinómio, por exemplo, $(x+2)(x+2)$, ou $(-x-2)(-x-2)$.

Os resultados deste estudo apontam na mesma direção dos obtidos por outros autores (e. g. Teixeira, 2012; Leitze e Kitt, 2000), especialmente na aprendizagem da fatorização de polinómios do segundo grau com uma variável, tópico em que os alunos costumam revelar dificuldades.

Referências

Leitze, A. R. & Kitt, N. A. (2000). Using Homemade *Algebra Tiles* to Develop Algebra and Prealgebra Concepts. *Mathematics Teacher, 93*(6), 462-520.

Ministério da Educação (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico.* Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2013). *Caderno de apoio 3.º ciclo.* Lisboa: Autor.

Neta, L. B. & Silva, F. O. (2014). O que vem a ser um *software* "Educativo"? *Construção Psicopedagógica, 22*(23), 72-80.

Teixeira, M. S. (2012). *A utilização de materiais manipuláveis em tecnologia no ensino e aprendizagem da fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau no 8.º ano.* (Relatório de mestrado não publicado). Universidade do Minho, Braga.

Paulo Ferreira Correia

ESCOLA SECUNDÁRIA DE BARCELOS

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Estudo de transformações geométricas de gráficos

A tarefa que a seguir se apresenta foi pensada para alunos do 10.º ano. Pretende-se que eles reconheçam e interpretem graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $a.f(x)$, $f(b.x)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, a, b, c e d números reais, a e b não nulos, bem como caracterizem as referidas funções.

Para a realização da tarefa os alunos terão de aceder a uma aplicação construída com o Geogebra. A função base tem como domínio e contradomínio um conjunto limitado, com o objetivo de permitir aos alunos observar quais as transformações geométricas que afetam estas características, entre outras, das funções. O facto dos extremos inferior e superior do contradomínio serem simétricos poderá dificultar a observação da relação entre o contradomínio de $f(x)$ e de $-f(x)$, contudo esta característica da função f permitirá ver até que ponto os alunos conseguem ir além do que observam, mostrando que percebem a transformação em causa. No enunciado da tarefa optou-se por só solicitar aos alunos a denominação de algumas transformações geométricas (translação e reflexão), por se entender que os nomes de outras não lhes serão familiares (contração e dilatação). Pretende-se que os seus nomes sejam introduzidos apenas aquando da discussão e síntese da tarefa com o grupo turma.

Apesar da aplicação ter sido construída no Geogebra Clássico, os alunos poderão aceder-lhe com os seus telemóveis através do browser. A opção de a aplicação não ter sido construída para a utilização da aplicação da calculadora gráfica do Geogebra prende-se com o facto de os alunos apresentarem alguma resistência na instalação de aplicações destinadas ao trabalho escolar. Porém, pode ser que com esta utilização estes vejam o potencial do Geogebra e instalem posteriormente algumas das suas aplicações por sua iniciativa.

Sílvia Zuzarte

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CASQUILHOS