O problema do trimestre

Sobre as respostas aos problemas anteriores

Problema da Revista 16

O problema proposto na *Educação e Matemática* nº 16 foi o seguinte:

Quais são os pontos do plano equidistantes de dois segmentos de recta com a mesma origem?

Recebemos respostas de quatro colegas: Paula Paleta (Ourique), Orlando Freitas (Funchal), J. Sacadura Cabral (Amadora) e Alberto Canelas (Queluz). Todos eles fazem uma abordagem semelhante e vamo-nos limitar a transcrever o essencial da resolução.

Relembremos primeiro que: distância de um ponto a um segmento de recta é a menor das distâncias entre o ponto dado e todos os pontos do segmento. Logo, podem acontecer dois casos. Ou é possível traçar a perpendicular do ponto ao segmento, e a distância é medida nessa perpendicular. Ou não se pode traçar a perpendicular, e a distância é medida entre o ponto dado e o extremo do segmento que esteja mais próximo.

A partir dos dois segmentos dados, construa-se a figura indicada de acordo com estas indicações:

1) Marque-se no segmento [OP] o ponto T, cuja distância a O seja igual ao comprimento de [OQ].

2) Tracem-se por T a perpendicular a [OP] e por Q a perpendicular a [OQ].

3) Estas duas perpendiculares intersectam-se num ponto A e a semi-recta $\dot{O}A$ é a bissectriz do ângulo formado pelos segmentos dados.

4) Trace-se a mediatriz do segmento [PQ] e a perpendicular a [OP] pelo ponto P. A intersecção destas duas rectas define o ponto B. Seja BC a mediatriz.

5) A curva AB é um arco de parábola com foco em Q e directriz OP.

6) Tracem-se por O as semi-rectas $\dot{O}R$ e $\dot{O}S$, perpendiculares a [OP] e [OQ] respectivamente.

A solução do problema está representada na figura e é constituída pelos pontos pertencentes:

1) ao ângulo ROS,

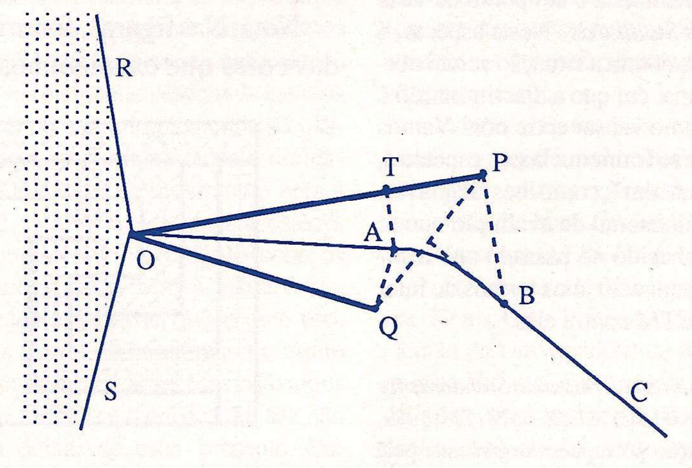
2) ao segmento de recta [OA],

3) à linha AB,

4) à semi-recta BC.

J.S. Cabral vai mais longe e demonstra que os pontos A e B nunca são pontos angulosos, isto é, que OA e BC são tangentes à parábola nos pontos A e B, respectivamente. Portanto, "a linha OABC é contínua, com derivada contínua".

Por seu lado, Orlando Freitas chama a atenção para o caso em que os dois segmentos de recta têm o mesmo comprimento. Quando isso acontece, os pontos A e B são coincidentes.



Solução do problema

Problema da Revista 17

No nº 17 de *Educação e Matemática* propusemos um problema dividido em duas partes:

1) Que números têm exactamente a mesma parte decimal que os seus inversos?

2) Que números têm exactamente a mesma parte decimal que os seus quadrados?

Também para este problema nos chegaram quatro respostas, exactamente dos mesmos leitores que nos enviaram a resolução do problema 16: Paula Paleta, Orlando Freitas, J. Sacadura Cabral e Alberto Canelas. Para eles, os nossos agradecimentos pela persistência, pelo entusiasmo, pelo interesse. Aos restantes leitores da revista renovamos o nosso apelo: esta secção vive muito da participação de quem a lê e será tanto mais interessante quanto mais respostas nos chegarem. Mandem-nos as vossas resoluções.

Neste problema, houve duas abordagens diferentes. Escolhemos a seguida por Sacadura Cabral e por Orlando Freitas por nos parecer mais clara e simples.

Números com a mesma parte decimal do seu inverso

Pensando primeiro apenas nas soluções positivas, os números x a determinar têm de obedecer à condição

$$x-\frac{1}{x}=n$$

em que **n** é um número natural, incluindo o zero. Vem então:

$$x^2-nx-1=0$$

Das duas soluções da equação, só nos interessa a que nos dá um valor positivo para x, ou seja,

$$x=\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$$

Para cada valor de n temos uma solução do problema. No quadro 1 podemos ver a lista das primeiras soluções, obtidas em computador com uma folha de cálculo e apresentadas com sete casas decimais.

A estas soluções, temos de juntar as negativas que são exactamente os simétricos dos números já obtidos.

Números com a mesma parte decimal do seu quadrado

Novamente, pensando apenas nas soluções positivas, e sendo **n** um número natural, incluindo o zero, os números **x** a descobrir terão de satisfazer a condição

$$x^2-x=n$$

Das duas soluções desta equação de segundo grau só nos interessa a positiva, ou seja,

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$$

No quadro 2 temos as soluções para os primeiros valores de n.

A estas soluções, temos de acrescentar o zero e os simétricos das soluções positivas.

José Paulo Viana

Quadro 1

n	x	1/x
0	1,0000000	1,0000000
1	1,6180340	0,6180340
2	2,4142136	0,4142136
3	3,3027756	0,3027756
4	4,2360680	0,2360680
5	5,1925824	0,1925824
6	6,1622777	0,1622777
7	7,1400549	0,1400549
8	8,1231056	0,1231056
9	9,1097722	0,1097722
10	10,0990195	0,0990195
11	11,0901699	0,0901699
12	12,0827625	0,0827625
13	13,0764732	0,0764732
14	14,0710678	0,0710678
15	15,0663730	0,0663730
16	16,0622577	0,0622577
17	17,0586214	0,0586214
18	18,0553851	0,0553851
19	19,0524866	0,0524866
20	20,0498756	0,0498756

Quadro 2

n	x	x²
0	1,0000000	1,0000000
1	1,6180340	2,6180340
2	2,0000000	4,0000000
3	2,3027756	5,3027756
4	2,5615528	6,5615528
5	2,7912878	7,7912878
6	3,0000000	9,0000000
7	3,1925824	10,1925824
8	3,3722813	11,3722813
9	3,5413813	12,5413813
10	3,7015621	13,7015621
11	3,8541020	14,8541020
12	4,0000000	16,0000000
13	4,1400549	17,1400549
14	4,2749172	18,2749172
15	4,4051248	19,4051248
16	4,5311289	20,5311289
17	4,6533119	21,6533119
18	4,7720019	22,7720019
19	4,8874822	23,8874822
20	5,0000000	25,0000000

Problema Proposto

Temos 5 objectos de pesos diferentes que queremos dispor por ordem crescente de peso, utililizando apenas uma balança de pratos para os comparar 2 a 2.

Como devemos proceder para minimizar o número de pesagens e qual é esse número?