Adições Enigmáticas

Paulo Afonso
José Filipe
Nuno Santos
Ana Rita Branco

Um dos educadores matemáticos mais desafiador ao raciocínio matemático no nosso país é o professor José Paulo Viana, que o digam as pessoas que têm tido o privilégio de ser impactadas com as suas propostas. Numa das suas mais recentes publicações no seio da APM, na Revista Educação e Matemática N.º 146, relativa ao trimestre janeiro, fevereiro e março de 2018, José Paulo Viana tece uma importante reflexão acerca da temática dos problemas, levantando um conjunto de oito questões, às quais deu resposta (Viana, 2018).

Uma das situações problemáticas abordadas pelo autor prendeu-se com uma adição enigmática, em que o leitor é desafiado a descobrir as parcelas da soma 2017, em que cada letra corresponde a um só algarismo e vice-versa:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & D & E & F \\ + & G & H & I \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

Como auxílio à resolução deixou a sugestão de se ter em linha de conta o conhecimento matemático da prova dos nove para se descobrir qual seria o algarismo que não seria utilizado.

Esta situação poderia ser resolvida por tentativa e erro, podendo ou não demorar-se muito tempo no encontrar da respetiva solução. Contudo, a sugestão ou dica matemática por si apresentada (prova dos nove) é altamente útil no auxílio que poderá proporcionar na procura de uma solução, porventura, mais rápida e eficaz. De facto, as parcelas envolvem apenas nove dos dez dígitos que fazem parte do nosso sistema de numeração, pelo que há a necessidade de se descobrir qual o dígito que não é abrangido por estas parcelas.

A prova dos nove diz-nos que, no algoritmo da adição, ao adicionarmos os dígitos da soma, que neste caso é dez, dividindo por nove dá resto um. Logo a soma de todos os dígitos das parcelas, quando sujeita à mesma divisão, também tem de dar resto um. Sabemos que a soma dos dez dígitos é quarenta e cinco, pelo que se não se utilizar o dígito oito, a soma dos nove dígitos restantes será trinta e sete, sendo que esta soma dividida por nove dá, de facto, resto um. Assim sendo, fica descoberto que o algarismo 8 não entra nesta adição enigmática.

Analisemos, agora, algumas possibilidades que existem de a soma ser 2017. Uma vez que o algarismo das dezenas é o 1, podemos concluir que o seu valor é o valor que resta na ordem das dezenas depois de ter sido transportada uma dezena desta ordem para a ordem seguinte - ordem das centenas. Isto implica que na ordem das centenas tenhamos de ter em conta este transporte. Para que a soma contemple 20 centenas e não podendo usar-se o dígito 8, admitimos a possibilidade de o 20 ser obtido, por exemplo, pela adição de 9 (A) + 7 (D) + 3 (G) + 1 (transporte). Ora na coluna das dezenas, onde sabemos que existe o 1, há três possibilidades de se obter esta soma: (a) 6 (B) + 4 (E) + 1 (H), (b) 5 (B) + 4 (E) + 2 (H) ou (c) 6 (B) + 5 (E) + 0 (H). Logo, existem, pelo menos, três possibilidades de se dar resposta a esta enigmática adição:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & D & E & F \\ + & G & H & I \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 9 & 6 & 5 \\ & 7 & 4 & 2 \\ + & 3 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 9 & 5 & 6 \\ & 7 & 4 & 1 \\ + & 3 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 9 & 6 & 4 \\ & 7 & 5 & 2 \\ + & 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

Claro está que permutando os dígitos da coluna das unidades das parcelas, bem como os dígitos da coluna das dezenas das parcelas em cada um destes três casos, originará muitas mais possibilidades de solução deste desafio. A título de exemplo, apresentamos duas novas possibilidades:

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 6 & 5 \\ & 7 & 1 & 0 \\ + & 3 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 9 & 5 & 1 \\ & 7 & 2 & 0 \\ + & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

Uma extensão deste desafio poderia ser descobrir qual a maior e a menor parcela. A maior parcela seria 975 e a menor seria 301. Vejamos possíveis exemplos:

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 7 & 5 \\ & 6 & 3 & 2 \\ + & 4 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 9 & 6 & 4 \\ & 7 & 5 & 2 \\ + & 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

Um estudo muito parecido a este, e que aconselhamos vivamente a sua leitura, é muito bem explorado por José Paulo Viana no seu livro intitulado "Uma Vida sem Problemas", quando desafia os seus leitores com a seguinte situação: "*Numa soma, cada letra representa um algarismo e todos os algarismos são diferentes. Nenhum número começa por 0. Existem várias soluções. Em qual delas o resultado da adição é menor? E qual é a maior soma possível*" (Viana, 2012, p. 181).

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & D & E & F \\ \hline G & H & I & J \end{array}$$

Voltando, contudo, à adição enigmática com que iniciámos esta reflexão, quais seriam as possíveis parcelas para que a soma pudesse ser o ano em que estamos (2018) ou 2019 ou 2020?

Fazendo-se um estudo semelhante à soma 2017 para a soma 2018, ao aplicar-se a prova dos nove ao algoritmo da adição, concluimos que a soma dos 9 dígitos usados nas parcelas deverá pertencer à classe de resto 2 quando dividida por 9. Ora, para que isto aconteça, não se poderá usar o dígito 7, pois a soma dos restantes nove dígitos dá 38, noves fora, 2. Eis uma possível solução para esta soma, não envolvendo o 7:

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 6 & 5 \\ & 8 & 4 & 3 \\ + & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

Já para o caso de a soma ser 2019, a prova dos nove indica-nos um número da classe de resto 3, pelo que o algarismo que não se poderá usar é o 6. De facto, a soma dos restantes nove algarismos é 39. Ou seja, noves fora, 3. Vejamos uma possível solução, tendo em conta esta nova soma:

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 7 & 5 \\ & 8 & 3 & 4 \\ + & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 9 \end{array}$$

Para a soma 2020 já será interessante propor uma solução baseada na observação das três soluções anteriores, que recordamos agora:

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 6 & 5 \\ & 7 & 4 & 2 \\ + & 3 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 9 & 6 & 5 \\ & 8 & 4 & 3 \\ + & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 9 & 7 & 5 \\ & 8 & 3 & 4 \\ + & 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 9 \end{array}$$

Não se usando, agora, o 5, eis uma possível solução mantendo a coluna das centenas, face aos dois últimos exemplos, mantendo a coluna das dezenas face ao último exemplo e utilizando os valores 6, 4 e 0 para a coluna das unidades:

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 7 & 6 \\ & 8 & 3 & 4 \\ + & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

É caso para dizer que Devlin (2002) tem imensa razão ao afirmar que a matemática é a ciência dos padrões!

Não poderíamos terminar esta reflexão sem elogiar o importante contributo que José Paulo Viana tem dado na atribuição de valor à matemática, enquanto área do conhecimento e enquanto ciência apaixonante e enigmática! Em sinal de agradecimento ao muito que tem feito pela divulgação desta ciência junto das comunidades docente e discente, propomos mais uma adição enigmática envolvendo o seu nome e o valor do seu trabalho: "Qual o valor de cada letra, de modo que a adição enigmática seguinte tenha solução, sabendo-se que a cada letra corresponde um algarismo diferente e vice-versa?"

$$\begin{array}{cccccc} & & J & O & S & É \\ + & V & I & A & N & A \\ \hline & V & A & L & O & R \end{array}$$

Apresentamos apenas uma de várias soluções possíveis para este desafio e desafiamos os leitores deste artigo a encontrar mais algumas soluções possíveis.

$$\begin{array}{cccccc} & & 7 & 0 & 6 & 4 \\ + & 5 & 1 & 8 & 3 & 8 \\ \hline & 5 & 8 & 9 & 0 & 2 \end{array}$$

Deixamos, pois, aqui expressa uma homenagem à capacidade desafiadora com que José Paulo Viana continua a encantar matematicamente os seus seguidores!

Referências:

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões.* Porto: Porto Editora.

Viana, J. (2018). Questões à volta dos problemas. *Educação e Matemática. 146* (janeiro-março, pp. 30-32).

Viana, J. (2012). *Uma Vida sem Problemas*. Lisboa: Clube do Autor.

Paulo Afonso

CIPEC - CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM PATRIMÓNIO, EDUCAÇÃO E CULTURA, INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO

José Filipe

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS AFONSO DE PAIVA

Nuno Santos

INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO

Ana Rita Branco

SANTA CASA DA MISERICÓRDIA DE CASTELO BRANCO