

Aspectos geométricos da projeção cilíndrica na cartografia

ANA PAULA JAHN

VINCENZO BONGIOVANNI

Desde os primórdios da civilização, os mapas aparecem como uma forma de comunicação entre pessoas. Hoje eles estão presentes em toda parte: na Internet, no telemóvel, em GPS, jornais e livros didáticos, entre outros. Neste artigo, apresentaremos alguns aspectos geométricos da cartografia – ou a arte de fazer mapas – que, em geral, não são trabalhados nas aulas de geografia, nem de matemática.

A grande dificuldade apresentada na construção de um mapa é o facto de uma superfície esférica não poder ser representada em um plano sem que haja alguma deformação. Para a construção de um mapa é necessário estabelecer correspondências entre os pontos da superfície esférica que representa a Terra e pontos de uma superfície plana. Isto pode ser feito de diversas maneiras: são os diferentes sistemas de projeção. Cada sistema privilegia certos aspectos a serem mantidos ou conservados. Foi demonstrado pelo matemático Euler que nenhum sistema de projeção conserva a distância entre dois pontos quaisquer de uma superfície esférica (Ávila, 2008). Sabe-se também que nenhum sistema de projeção conserva simultaneamente ângulos e áreas. Neste texto, nos limitaremos a apresentar alguns aspectos geométricos de três tipos de projeções cilíndricas. Apresentaremos um exemplo da projeção cilíndrica clássica que distorce ângulos e áreas, da projeção cilíndrica de Mercator que conserva ângulos e da projeção cilíndrica de Lambert que conserva áreas.

PROJEÇÃO CILÍNDRICA CLÁSSICA

Consideremos um cilindro tangente a uma superfície esférica que representa o globo terrestre. Fixemos o olho de um observador no centro O da esfera. Ao visar um ponto P da superfície esférica, a semirreta interseca a superfície cilíndrica num ponto Q (ver figura 1). Após projetar todos os pontos da superfície esférica na superfície cilíndrica, essa superfície é planificada, isto é, *corta-se* a superfície cilíndrica ao longo de uma geratriz e , a seguir, ela é *desenrolada*. Nessas condições, observa-se que, paralelos – secções da superfície esférica por planos paralelos à linha do Equador – são transformados em circunferências na superfície cilíndrica e meridianos são transformados em geratrizes do cilindro.

Para construir o quadriculado que representa um sistema de projeção cilíndrica clássica, procedemos da seguinte maneira:

para cada ponto $P(\theta, \lambda)$, onde θ representa a latitude e λ a longitude, considera-se o ponto $Q(x, y)$. A figura 2 ilustra o procedimento para determinar as coordenadas x e y .

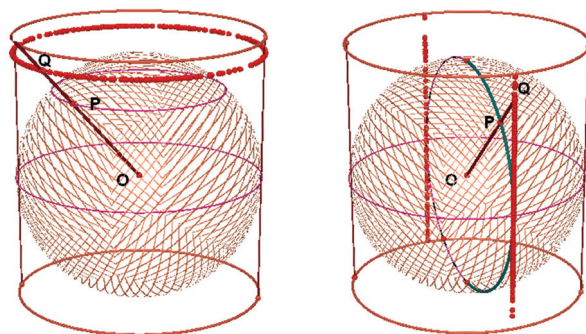


Figura 1. Projeção de pontos da superfície esférica na superfície cilíndrica

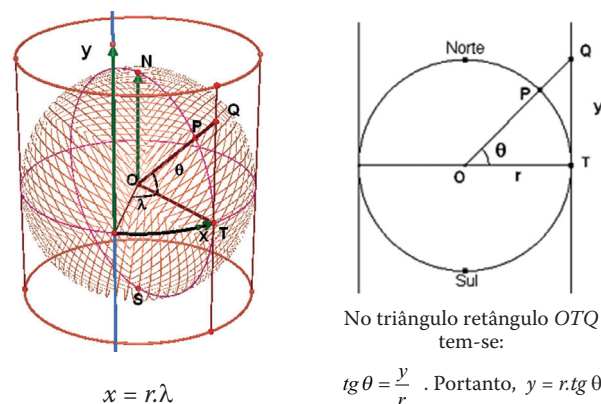


Figura 2. Determinação de coordenadas em um sistema de projeção cilíndrica clássica

No plano, definimos um referencial, de modo que o eixo Ox coincida com a linha do Equador e o eixo Oy coincida com o meridiano de Greenwich. No eixo x marcamos um segmento do comprimento do Equador que é 2, de modo que os pontos extremos do segmento sejam $(-\pi r, 0)$ e $(\pi r, 0)$. A abscissa de um ponto será dada por $x = r\lambda$ (fórmula do comprimento de um arco), com λ em radianos e a ordenada por $y = r.tg \theta$, onde θ é a latitude. Como o ângulo que cada paralelo faz com cada meridiano é reto, as retas que representam os paralelos são perpendiculares às retas que representam os meridianos.

Desse modo, as imagens dos meridianos e dos paralelos formam um quadriculado no plano (figura 3).

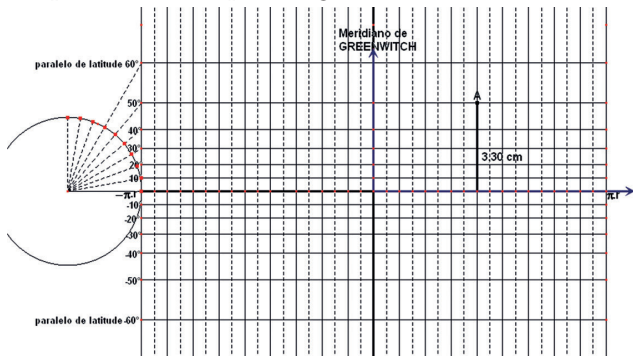


Figura 3. Construção de um ponto do mapa da projeção cilíndrica clássica

Por medição direta no mapa, teremos para o ponto A, que tem latitude 50° e longitude 80°, o valor de y aproximadamente igual a 3,3 cm.

Se utilizarmos a fórmula acima, $y = r \operatorname{tg} \theta$, com $r = 2,77$, teremos $y = 2,77 \operatorname{tg} 50^\circ \approx 3,30$ cm. A projeção cilíndrica clássica distorce distâncias, ângulos e áreas. No entanto, ela conserva as distâncias na linha do Equador.

PROJEÇÃO CILÍNDRICA DE MERCATOR

Em 1569, Gerhard Kremer, chamado de Gerhard Mercator, fez uma modificação na projeção cilíndrica clássica para que o formato dos continentes pudesse ser mantido, ou seja, para que os ângulos fossem conservados. De facto, essa projeção conserva ângulos, mas não áreas.

Seja D um ponto da esfera de centro O com coordenadas (θ, λ) onde θ representa a latitude e λ a longitude. Um arco AB está contido na linha do Equador e um arco CD está contido num paralelo de latitude θ de modo que A e C estejam no mesmo meridiano e B e D estejam em outro meridiano. Na figura 4, pode-se observar que $\cos \theta = \frac{r}{R}$, onde r é o raio do círculo que contém o arco CD e R é o raio da esfera. Conclui-se que $r = R \cos \theta$. O comprimento do arco AB é $R \cdot \lambda$ e o comprimento do arco CD é $r \cdot \lambda$. Aqui, indicaremos o comprimento de um arco AB por \widehat{AB} . Portanto, $\widehat{AB} = R \lambda$ e $\widehat{CD} = r \lambda$. Mas, $\widehat{CD} = r \cdot \lambda = \lambda \cdot R \cos \theta = \widehat{AB} \cos \theta$, ou seja, os arcos compreendidos entre os dois meridianos têm como comprimento a medida do arco AB vezes o cosseno da latitude. Quanto maior a latitude θ , menor o comprimento do arco CD.

A ideia de Mercator, apresentada no artigo do Ávila (2008), resumidamente, é a seguinte: para preservar os ângulos no quadriculado é necessário que a partir de um ponto qualquer do quadriculado, a variação sofrida no meridiano seja a mesma que a variação sofrida no paralelo. Mas no quadriculado, os paralelos têm comprimentos iguais (figura 5).

Portanto, os segmentos correspondentes aos arcos CD e AB serão C'D' e A'B' com $\overline{C'D'} = \overline{A'B'}$. Mas, o comprimento do

segmento A'B' é igual ao comprimento do arco AB, ou seja, $\overline{A'B'} = \widehat{AB}$. Portanto, $\overline{CD} = \widehat{AB} \cos \theta = \overline{A'B'} \cos \theta = \overline{C'D'} \cos \theta$. Donde se conclui que $\overline{C'D'} = \frac{\overline{CD}}{\cos \theta} = \overline{CD} \sec \theta$. Isto significa que a variação num paralelo depende somente do valor da secante da latitude.

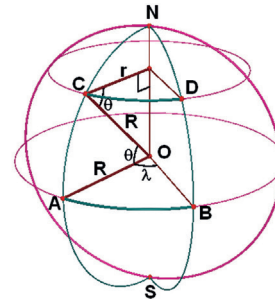


Figura 4. Arcos compreendidos entre dois meridianos

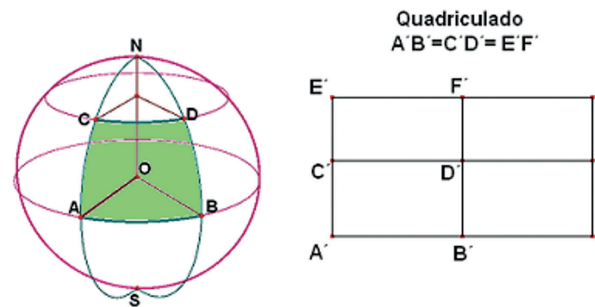


Figura 5. Passagem do quadrilátero esférico ABCD para o quadriculado

Como proceder para ter a mesma variação num meridiano? Usando a linguagem do cálculo diferencial, devemos impor que $y' = R \cdot \sec \theta$, ou seja, y é o produto do raio pelo integral da secante de θ . Conclusão: a projeção cilíndrica de Mercator transforma o ponto de coordenadas (θ, λ) no ponto (x, y) de modo que $x = R \cdot \lambda$, com λ em radianos e $y = R \cdot \ln \left(\frac{1}{\cos \theta} + \operatorname{tg} \theta \right) = R \cdot \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$ onde R é o raio da esfera.

Portanto, para obter as retas horizontais do quadriculado, devemos aplicar a fórmula acima para cada latitude.

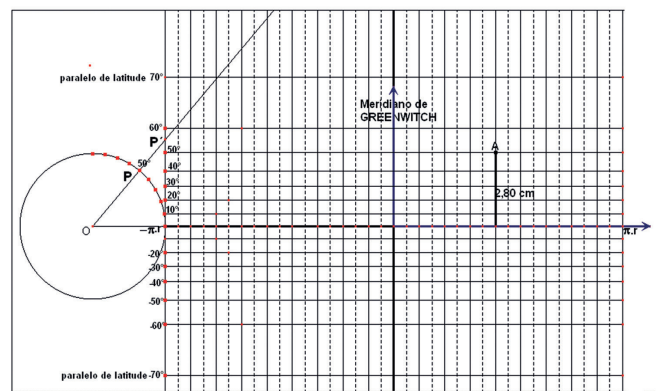


Figura 6. Construção de um ponto do mapa da projeção cilíndrica de Mercator

Comparando as ordenadas da projeção cilíndrica clássica com a projeção cilíndrica de Mercator, vemos que há um decréscimo nessa última. Observa-se no mapa acima (figura 6), que a semirreta que passa por um ponto da esfera de latitude 50° , intersecta a reta num ponto P' acima da ordenada no mapa de Mercator.

Seja A um ponto da superfície esférica de latitude 50° e longitude 80° , para obter as suas coordenadas no mapa, devemos utilizar a fórmula acima, ou seja, sendo $R = 2,77$ o raio da esfera, a ordenada do ponto A será

$$y = R \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = 2,77 \cdot \ln \operatorname{tg} (45^\circ + 25^\circ) = 2,77 \cdot \ln \operatorname{tg} (70^\circ) \approx 2,8.$$

Podemos observar que na projeção cilíndrica clássica, a ordenada do ponto A é 3,3 cm enquanto na de Mercator é 2,8 cm (ambas as medidas aproximadas). É esse decréscimo que preserva os ângulos e, portanto, os formatos das figuras. Para altas latitudes, a projeção de Mercator apresenta distorção.

PROJEÇÃO DE LAMBERT

É uma projeção introduzida em 1772 por Lambert e que preserva áreas. É uma projeção pouco utilizada na construção de mapas e sua relevância deve-se ao facto de ter servido de modelo para a concepção de outras projeções. Ela baseia-se num resultado da obra de Arquimedes que mostra que a superfície esférica tem a mesma área que a superfície lateral de um cilindro que a circunscreve.

Para cada ponto P da superfície esférica de centro O , considere o plano que contém o eixo do cilindro e o ponto P . Seja T a intersecção desse plano com a linha do Equador. Nesse plano, pelo ponto P traça-se uma paralela a semirreta OT . Essa reta intersecta a superfície cilíndrica no ponto Q . Esse é o procedimento geométrico para obter as retas horizontais do quadriculado.

A projeção cilíndrica de Lambert transforma o ponto P (θ, λ) onde θ representa a latitude e λ a longitude, no ponto Q (x, y). A figura 7 ilustra o procedimento para a determinação de x e y .

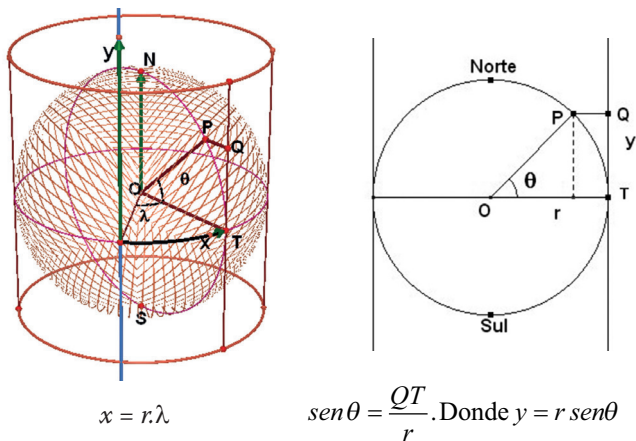


Figura 7. Determinação de coordenadas em um sistema de projeção cilíndrica de Lambert

No plano, definimos um referencial, de modo que o eixo Ox coincida com a linha do Equador e o eixo Oy coincida com o meridiano de Greenwich. Teremos $x = r \cdot \lambda$ e $y = r \cdot \operatorname{sen} \theta$, sendo r o raio da esfera e a longitude λ em radianos (figura 8).

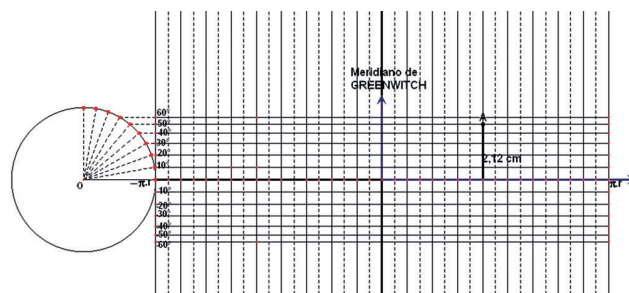


Figura 8. Construção de um ponto do mapa da projeção cilíndrica de Lambert

O ponto A tem latitude 50° e longitude 80° . Sendo o raio da circunferência abaixo, a ordenada do ponto A pode ser obtida pelo procedimento indicado acima ou pode ser calculada pela fórmula $y = r \cdot \operatorname{sen} \theta$. Nesse caso, para $\theta = 50^\circ$ teremos: $y = 2,77 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \approx 2,12$.

Arquimedes, no seu livro *A esfera e o cilindro I*, nas proposições 42 e 43, demonstra que a área da calota esférica é equivalente à de um círculo cujo raio é igual ao segmento determinado pelo polo e um ponto qualquer da circunferência da base.

Em linguagem atual, ele afirma que a área da calota é igual a $\pi \cdot x^2$ onde $x = PN$.

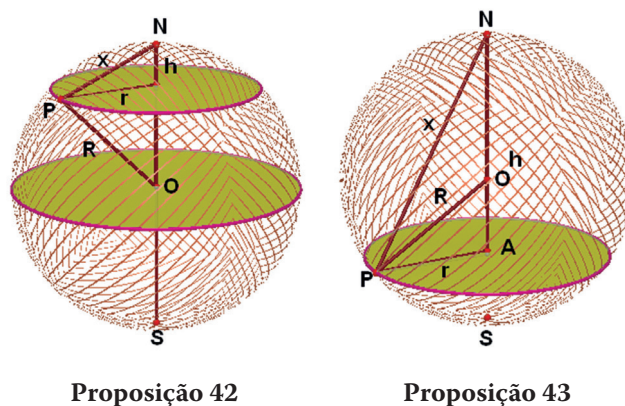


Figura 9. Proposições da obra de Arquimedes

É fácil mostrar que esse resultado é equivalente a $2\pi R h$, onde R é o raio da esfera e $h = NA$. De facto, na primeira ilustração da figura 9, temos: $x^2 = r^2 + h^2$ e $R^2 = r^2 + (R-h)^2$. Das igualdades resulta $x^2 = 2Rh$.

O resultado vale também para a segunda ilustração da figura 9. De facto, temos: $x^2 = r^2 + h^2$ e $R^2 = r^2 + (h-R)^2$. Das igualdades resulta $x^2 = 2Rh$.

A partir desse resultado, podemos deduzir que a área de uma zona esférica – superfície da esfera compreendida entre dois planos paralelos – é também igual a $2\pi Rh$.

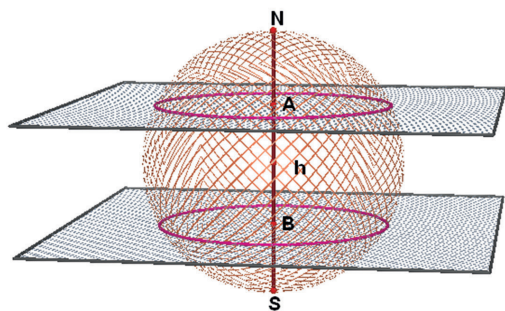


Figura 10. Área de uma zona esférica

Considere uma esfera de raio R inscrita em um cilindro. A área da superfície cilíndrica compreendida entre os dois planos paralelos é $2\pi Rh$ e a área da superfície esférica compreendida entre os dois planos paralelos é $2\pi Rh$. Portanto, a planificação da superfície cilíndrica conserva a área.

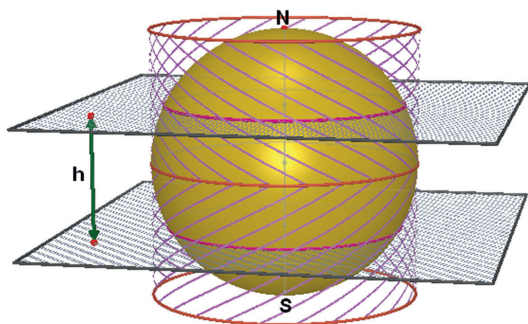


Figura 11. Superfície cilíndrica compreendida entre dois planos paralelos

Com o que foi exposto, pretendemos fornecer incentivos para que professores do Ensino Médio, no Brasil, ou do Secundário, em Portugal, e mesmo do Ensino Superior possam desenvolver propostas de trabalho interdisciplinar, em um contexto interessante e motivador: o da cartografia. Entendemos que esse tema, em torno da construção de sistemas de projeção, permite abordar diversos conceitos matemáticos no campo da geometria plana, espacial e esférica, da trigonometria, dentre outros, além de se relacionar com outros componentes curriculares, em especial com a geografia e a história. A título de ilustração, uma atividade interessante pode consistir em comparar mapas (atuais e antigos) elaborados a partir de diferentes sistemas de projeção, observando e analisando as propriedades que são ou não conservadas em cada caso e discutindo eventuais aspectos político-ideológicos que influenciaram a escolha de certos tipos de projeção para representar o globo terrestre ao longo dos tempos. É pertinente observar, por exemplo, as áreas da América

do Sul e da Groelândia na projeção de Mercator (figura 12) e atentar para os continentes que aparecem em destaque na projeção de Lambert (figura 13).

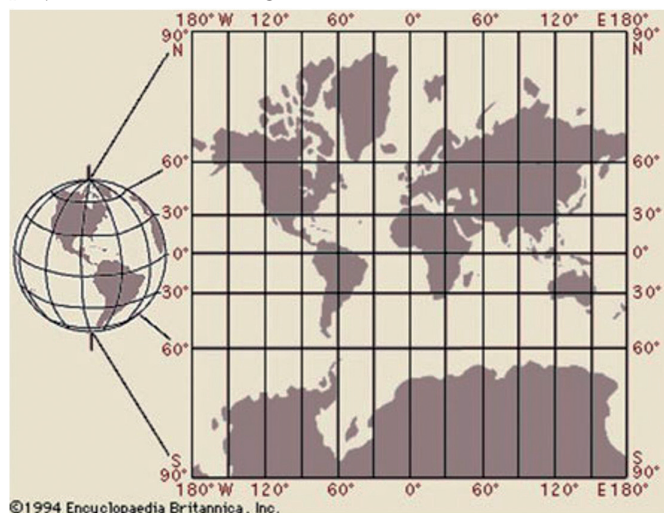


Figura 12. Projeção de Mercator

Fonte: <https://www.britannica.com/science/Mercator-projection> (último acesso: 12 set 2018)



Figura 13. Projeção de Lambert

Fonte: http://www.manifold.net/doc/mfd9/cylindrical_equal_area_projection.htm (último acesso: 12 set 2018)

Referência

Ávila, G. (2008). A Matemática e a Cartografia. *Revista do Professor de Matemática*, n.º 65, 4-11.

ANA PAULA JAHN

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, BRASIL

VINCENZO BONGIOVANNI

COLÉGIO UNIVERSITAS, SANTOS/SÃO PAULO, BRASIL