

Problemas de Fermi: uma oportunidade para a interdisciplinaridade na aula de matemática

NÉLIA AMADO

SUSANA CARREIRA

Os problemas de Fermi, embora pouco conhecidos em Educação Matemática, constituem uma excelente oportunidade para promover o desenvolvimento de diversas competências enunciadas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al. 2017).

Neste artigo, damos a conhecer a origem dos Problemas de Fermi, a sua importância no ensino e aprendizagem da matemática e, por fim, apresentamos um breve relato da resolução de alguns Problemas de Fermi por alunos do 2.º e 3.º ciclo do ensino básico, na disciplina de matemática.

OS PROBLEMAS DE FERMI

Quem foi Enrico Fermi?

Enrico Fermi (1901-1954) foi um dos grandes físicos do século XX. Nasceu e estudou em Itália, tendo iniciado a sua carreira como professor de matemática e física na Universidade de Roma. Apenas com 37 anos foi galardoado com o Prémio Nobel da Física. Como professor, ficou conhecido pelo tipo de problemas que apresentava aos seus alunos para os preparar para o trabalho experimental. Fermi propunha frequentemente problemas de estimativa para mostrar o poder do pensamento dedutivo e cultivar a ideia de que se podem simplificar processos a partir do raciocínio (Albarracín, 2017).

Em 1939, Fermi emigra para os Estados Unidos da América e os Problemas de Fermi, pelo seu potencial, tornam-se uma tradição em diversas faculdades americanas. Atualmente, existem nos EUA diversas competições de resolução de Problemas de Fermi, além de serem frequentemente utilizados em entrevistas de emprego para empresas na área das tecnologias.

EM QUE CONSISTEM OS PROBLEMAS DE FERMI?

Não é fácil encontrar uma definição para os problemas de Fermi; podemos dizer que são essencialmente problemas de cálculo para os quais não existe uma resposta única, mas antes uma solução aproximada e razoável. Arleböck (2009) considera que os Problemas de Fermi são problemas abertos, não padronizados,

que exigem que os alunos estabeleçam suposições sobre a situação problemática colocada e que estimem quantidades relevantes antes de se envolver em cálculos.

O exemplo mais conhecido de um Problema de Fermi está relacionado com a vida pessoal de Fermi quando o mesmo se mudou para Chicago. As várias histórias em torno deste problema referem que, uma certa noite, ao chegar a casa, a mulher de Fermi lhe pediu para encontrar um afinador de piano para afinar o seu instrumento musical. Fermi terá de imediato colocado a questão: *Quantos afinadores de piano haverá em Chicago?*

Para chegar a uma resposta é necessário estabelecer algumas conjecturas que exigem um conhecimento do contexto do problema. Uma solução típica consiste, por exemplo, em multiplicar uma série de estimativas, adequadas e realistas, que nos permitam encontrar uma resposta desejavelmente próxima do valor real. Existem várias resoluções deste problema atribuídas a Fermi que diferem entre si apenas nos valores estimados. A seguinte é uma dessas resoluções.

Consideremos:

- População de Chicago: 3 milhões de pessoas
- Existem 2 pessoas em cada casa
- 1 em cada 20 casas tem um piano
- 1 piano é afinado uma vez por ano
- São necessárias 2 horas para afinar um piano
- Cada afinador trabalha 8 horas por dia, 5 dias por semana e 50 semanas por ano.

Partindo destas suposições e estimativas, basta calcular o número de afinações a realizar por ano, ou seja,

$$(3\ 000\ 000\ \text{pessoas} / 2\ \text{pessoas por casa}) \times (1\ \text{piano} / 20\ \text{casas}) \\ 1\ \text{afinação por ano} = 75\ 000\ \text{afinações por ano}$$

Por outro lado,

$$(50\ \text{semanas} \times 5\ \text{dias} \times 8\ \text{horas}) / (2\ \text{horas por piano}) = 1\ 000 \\ \text{horas disponíveis}$$

A estimação final, será, assim: $75\ 000 / 1\ 000 = 75$ afinadores de piano.

Não se sabe ao certo se este valor encontrado por Fermi era realmente próximo do valor existente à data. Ao longo dos anos, vários investigadores têm procurado validar a estimativa apresentada por Fermi. Seguindo o processo anteriormente descrito e com os dados de 2009, foi obtida uma estimativa de 225 afinadores de piano em Chicago, sendo que os dados oficiais indicavam 290 profissionais registados. Conclui-se assim que a estimativa encontrada por Fermi não devia estar muito longe da realidade.

CARACTERÍSTICAS DOS PROBLEMAS DE FERMI

Årlebäck (2011) é um dos investigadores que tem feito vários estudos em educação matemática relacionados com a introdução de problemas de Fermi. Considera, em particular, que os problemas de Fermi podem ser vistos e tratados como uma espécie particular de problemas de modelação, ainda que esta seja uma posição geradora de alguma controvérsia. Para alguns autores que investigam questões relativas ao processo de modelação matemática, faltam nestes problemas alguns elementos específicos da modelação, designadamente o facto de não se ver claramente qual é o modelo matemático em causa e que realidade ele descreve e também nem sempre os resultados atingidos podem ser efetivamente confrontados com o real e, conseqüentemente, validados. Em todo o caso, Årlebäck enuncia um conjunto de características presentes nos problemas de Fermi, que os tornam interessantes e merecedores de atenção, na educação matemática:

- São acessíveis e podem ser abordados por todos os alunos, individualmente ou em um grupo;
- Podem ser resolvidos em diferentes níveis de escolaridade, com diferentes níveis de complexidade;
- Não exigem conhecimentos matemáticos especializados;
- Devem ser baseados em situações do mundo real que façam sentido para os alunos;
- Exigem a recolha e tratamento de informação relevante e o estabelecimento de relações entre condições e elementos da realidade;
- Como problemas abertos que são, não existe à partida uma estratégia ou um procedimento específico para os abordar, pelo que os alunos são desafiados a encontrar uma estratégia, desenvolvendo uma diversidade de competências ao trabalharem sobre o problema;
- A não existência de dados numéricos na formulação do problema, promove a necessidade de fazer estimativas razoáveis;

- São problemas que favorecem a discussão em torno de diferentes estratégias e soluções encontradas.

OS PROBLEMAS DE FERMI NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No documento o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al. 2017) é recomendado que, desde os primeiros anos, os alunos sejam desafiados com situações problemáticas do seu quotidiano ou presentes no meio sociocultural e geográfico, recorrendo para tal a materiais e recursos diversificados. É igualmente reconhecido como relevante o recurso a experiências de aprendizagem que lhes permitam procurar padrões (numéricos, figurais, etc.), formular conjecturas sobre o comportamento de fenómenos e as propriedades dos objetos, assim como argumentar sobre a sustentabilidade das suas conjecturas, estimar resultados, entre outros. O mesmo documento reconhece a necessidade de alterações das práticas pedagógicas e didáticas de forma a adequar a globalidade da ação educativa às finalidades do perfil de competências dos alunos (p. 31). Ao analisarmos as características dos problemas de Fermi e o documento Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, facilmente constatamos que a resolução deste tipo de problemas parece convergir para o desenvolvimento das competências desejadas. De facto, na resolução de um problema de Fermi é necessário mobilizar competências como:

- i. utilizar e dominar instrumentos diversificados para pesquisar, descrever, avaliar, validar e mobilizar informação, de forma crítica e autónoma, verificando diferentes fontes documentais e a sua credibilidade;
- ii. interpretar informação, planear e conduzir pesquisas;
- iii. pensar de modo abrangente e em profundidade, de forma lógica, observando, analisando informação, experiências ou ideias, argumentando com recurso a critérios implícitos ou explícitos, com vista à tomada de posição fundamentada;
- iv. estabelecer relações entre conhecimentos, emoções e comportamentos;
- v. compreender os equilíbrios e as fragilidades do mundo natural na adoção de comportamentos que respondam aos grandes desafios globais do ambiente; (Martins, 2017)

ALGUNS PROBLEMAS DE FERMI PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Há um número infindável de situações, curiosidades e interrogações que se podem converter em verdadeiros problemas de Fermi. Apresentamos aqui uma curta amostra de situações:

*Que quantidade de água bebe uma pessoa ao longo da sua vida?
Que quantidade de água consome uma família durante um ano?*

Quantas garrafas de plástico são descartadas por uma família, por mês?

Quantas pessoas poderiam ficar abrigadas no ginásio da tua escola em caso de catástrofe?

Quantas pessoas poderiam ser abrigadas em todas as salas de aula da escola?

Quantas pessoas poderiam ser abrigadas em toda a escola se fossem usadas tendas e pudessem aproveitar-se os espaços exteriores?

Quantos minutos passa um aluno da turma ao telemóvel durante um mês?

.....

São apenas alguns exemplos de problemas de Fermi que podem ser propostos a alunos de qualquer ano de escolaridade, cuja complexidade de resolução depende naturalmente de diversos fatores, como o nível de escolaridade, o tempo disponível para a resolução do problema, as áreas disciplinares envolvidas, a conjugação de trabalho fora da sala de aula e na sala de aula, etc.

Estes e outros problemas de Fermi foram trabalhados por professores do ensino básico no âmbito de uma oficina de formação. Todas as tarefas propostas na formação foram implementadas pelos professores participantes nas suas turmas e a resolução foi posteriormente discutida numa sessão de formação. Importa sublinhar que os Problemas de Fermi foram trabalhados nas últimas sessões realizadas, o que limitou o tempo que os professores puderam oferecer aos alunos das suas turmas para trabalharem nos respetivos problemas. A seleção de diversos problemas em torno do consumo da água foi essencialmente motivada pela seca severa que se registava em Portugal no período em que decorreu a ação. O tema era, pois, da maior atualidade e interesse para todos os cidadãos. Este tipo de problemas pode ser proposto, como já foi salientado, a alunos de qualquer nível de ensino e em qualquer momento do processo de ensino e aprendizagem. Um único problema pode envolver números e operações, mas também geometria e medida ou, ainda, organização e tratamento de dados. Por outro lado, a natureza dos próprios problemas envolve necessariamente conhecimentos das mais diversas áreas. Na resolução dos problemas que apresentamos em seguida é evidente a presença de vários temas matemáticos.

BREVES EXEMPLOS DE RESOLUÇÕES DE ALUNOS DO ENSINO BÁSICO

Apresentamos em seguida resoluções de alguns dos problemas de Fermi propostos pelos formandos da oficina de formação aos seus alunos.

Quantas garrafas de plástico são descartadas por uma família, por mês?

Este problema foi proposto por uma professora do 2.º ciclo, com o objetivo de promover a articulação entre as três disciplinas que ela própria leciona: matemática, ciências naturais e formação pessoal e social.

A primeira dificuldade que os alunos manifestaram foi com a interpretação da tarefa. De facto, esta é uma dificuldade que deve ser prevista quando os alunos se deparam com um problema de Fermi pela primeira vez. A ausência de dados numéricos neste tipo de problema gera uma certa surpresa e provoca dificuldade já que o aluno, de imediato, não consegue mobilizar algum tipo de conhecimento matemático estudado na aula para avançar na resolução. Esta dificuldade era esperada pela professora que começou por desafiar os vários grupos a discutirem o assunto e a formularem algumas conjecturas de modo a planificarem o processo de recolha e tratamento de informação. Na discussão inicial, os alunos começaram por apresentar algumas questões:

Mas quantas pessoas colocamos?

E as garrafas? São grandes ou pequenas?

E como sabemos quantas pessoas tem cada família?

Perante estas questões dos alunos, foi tomada a opção de iniciar uma recolha de dados nos respetivos contextos familiares. Cada aluno recolheu dados em sua casa com a ajuda dos pais. Na primeira fase, foi preciso saber que garrafas de plástico eram consumidas em casa, para fazer uma estimativa da quantidade de garrafas que cada agregado familiar descartava mensalmente. Rapidamente os alunos descobriram que o uso de garrafas de plástico ultrapassava largamente as garrafas de água ou de refrigerantes. Também se aperceberam imediatamente de que as garrafas tinham capacidades distintas, formas distintas e até pesos diferentes. A seguir, mostra-se o registo de um aluno relativamente às garrafas e recipientes de plástico que em sua casa eram utilizados por mês.

garrafas de água - 120 sumos - 3
garrafas - 8 azule - 1 Total - 144 / mês
shampoo - 2 detergente - 3
amaciador - 3 gel de banho / mãos - 4

A partir desta recolha de dados, os alunos procederam à organização e tratamento da informação recolhida. Também foi necessário mobilizar alguns tópicos relacionados com os números e operações. No entanto, a discussão foi permeada por questões relacionadas com a água, os rios e oceanos, a poluição provocada pelos plásticos na natureza e a necessidade de preservar a água. No final, abriram-se as portas da sala de aula para mostrar à comunidade o trabalho dos alunos e sensibilizar alunos e professores para esta temática.

Quantas garrafas de água consome uma família por mês?

Para a resolução deste problema, os alunos de uma turma de 8.º ano começaram por registar o número de garrafas de água

consumidas diariamente por cada elemento do seu agregado familiar. Em seguida, procederam à organização e tratamento dos dados recolhidos, seguindo diferentes estratégias, uma das quais se ilustra a seguir.

Garrafas de plástico

1. Quantas garrafas de plástico são consumidas por uma família por mês?

(Dia)	pai	mãe	irmão	irmã	
	4	3	1	2	⇒ 10

(Mês) $10 \times 30 = 300$
 P: São consumidas numa família por mês 300 garrafas de plástico. Notação científica = 3×10^2

Após chegarem a uma estimativa do número de garrafas de água consumidas pelas respetivas famílias, pesquisaram dados sobre a população do Algarve para estimarem um valor para o número de garrafas consumidas nesta região, recorrendo à notação científica que tinha sido estudada recentemente, para apresentar os seus resultados.

3 Garrafas: 8.
 População do Algarve (2012): 444390.
 Mês: 31 dias.

$$8 \times 444390 = 3,555,120$$

$$3,555,120 \times 31 = 110,208,720$$

$$110,208,720 = 1,10208720 \times 10^8$$

Durante a análise dos dados os alunos tomaram consciência de que a água que consumiam não estava de acordo com o recomendado. Outros, ao perceberem realmente a quantidade de garrafas que diariamente descartavam, defenderam veementemente a sua reutilização.

A resolução deste problema, na aula de matemática, não desenvolveu apenas competências relacionadas com o saber científico, técnico e tecnológico. Aspetos relacionados com a saúde e o bem-estar ou com o pensamento crítico e a cidadania estiveram muito presentes.

Que quantidade de água consome uma pessoa ao longo da sua vida?

À semelhança dos problemas anteriores, também este problema permitiu abordar uma diversidade de temas matemáticos de uma forma contextualizada. Os alunos trabalharam, em simultâneo, números e operações, geometria, e organização e tratamento de dados. Mas a discussão que se gerou criou pontes para outras áreas disciplinares, em particular, para as ciências naturais e geografia.

Os alunos começaram por investigar a esperança média de vida e estabelecer o consumo diário de água recomendado, para calcularem a quantidade consumida por uma pessoa ao longo da sua vida. Este estudo permite estabelecer conexões importantes, por exemplo, com biologia, economia ou geografia.

	Mulheres	Homens
Esperança Média de vida	83 anos	77 anos
Consumo diário de água	1,5 l	1,5 l

Mulheres:	Homens:
83 anos \approx 30295 dias	77 anos \approx 28105
1 dia ----- 1,5 l	1 dia ----- 1,5 l
30295 ----- x	28105 ----- x
x \approx 45442,5 litros	x \approx 42157,5 litros



	Mulheres e Homens
Litros de água usados por mês	4,6 m3

1 mês ---- 4,6 m3 1 ano ---- 12 meses

	Mulheres	Homens
Litros de água usada na higiene durante toda a vida	4581,6 m3	4250,4 m3

COMENTÁRIOS FINAIS

Partindo destas situações, e de acordo com as possibilidades existentes, o professor pode criar diversas oportunidades de desenvolvimento de competências fundamentais, não só no âmbito da matemática mas envolvendo outras disciplinas.

Simultaneamente, trabalhar em problemas de Fermi cria boas oportunidades para atividades interdisciplinares. É praticamente inevitável enveredar por campos exteriores à matemática perante um problema de Fermi. Por se tratar de um tipo de problemas que se referem a questões do mundo real e que implicam analisar, investigar e compreender aspetos desse mundo, conduzem rapidamente à necessidade de procurar informações, fazer interpretações e identificar fatores essenciais e determinantes para tratar a questão colocada, obter dados, considerar conceitos e processos de outras áreas de conhecimento, bem como assumir pressupostos e admitir determinadas condições como razoáveis.

Trata-se ainda de problemas que estão ao alcance de todos os alunos e que, de uma forma ou de outra, estão próximos de situações quotidianas e comuns na vida das pessoas e das sociedades. A questão do consumo de água, por exemplo, é cada vez mais um tema urgente a tratar na sala de aula, de matemática e não só. É, aliás, um tema que nos pode levar a uma grande diversidade de problemas e questões, todas elas de atualidade muito evidente. Veja-se, o recente artigo do jornal Público, de 24 de Agosto de 2018, intitulado “Temos de aprender a consumir menos água”, escrito por Catarina Albuquerque (<https://www.publico.pt/2018/08/24/sociedade/noticia/a-nossa-relacao-com-a-agua-vai-mudar-muito-1841846>). Mas outros assuntos podem estar igualmente na ordem do dia, em dado momento. Quando esta oficina de formação foi proposta, os professores trabalharam entusiasticamente sobre uma tarefa em que, por

hipótese, a sua escola, localizada em Portimão, seria usada pelos serviços de proteção civil, Cruz Vermelha e Bombeiros, para albergar sobreviventes de uma catástrofe. A discussão, as ideias, as estratégias usadas, a procura das plantas da escola, a análise da geometria dos espaços, etc., mostraram claramente a riqueza e as potencialidades matemáticas da tarefa. O grande desastre que foi o incêndio recente na serra de Monchique veio tragicamente tornar esta questão muito atual e muito real. Muitas pessoas retiradas das suas casas e sobreviventes deste incêndio foram acolhidas na Escola EB 2/3 de Monchique. Mas também foi usado o Portimão Arena como abrigo para muitos desalojados do incêndio de Monchique. Pela forma como a matemática ali parece despontar, é muito sugestiva a descrição feita por João Porfírio, no Jornal Observador de 9 de agosto de 2018:

“400 colchões. 400 jogos de cama. 400 toalhas de banho. 400 cadeiras pretas. Todos os colchões colocados à mesma distância uns dos outros, as cadeiras todas do mesmo lado. A simetria no interior do pavilhão da Portimão Arena era quase perfeita e contrastava com a desorganização e mesmo o caos aparente do combate às chamas que se travava a poucos quilómetros dali, entre Monchique e Silves.” (Retirado de <https://observador.pt/especiais/monchique-a-vida-no-pavilhao-que-foi-casa-para-144-pessoas-enquanto-a-serra-ardia/>).



Foto do Jornal Observador, de 9 de agosto de 2018, disponível em: <https://observador.pt/especiais/monchique-a-vida-no-pavilhao-que-foi-casa-para-144-pessoas-enquanto-a-serra-ardia/>

Este mês de agosto foi, por certo, um mês com notícias e acontecimentos que evocaram imediatamente alguns problemas de Fermi. Mas os problemas de Fermi estão aí para serem formulados e resolvidos em qualquer mês e em qualquer dia. Parece-nos importante que cheguem proveitosamente à aula de matemática e também a outras aulas, como base de projetos de interdisciplinaridade.

Referências:

Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2). Doi: 10.4995/msel.2017.7707.

Ärlebäck, J. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331-364.

Ärlebäck, J. (2011). Exploring the solving process of groups solving realistic Fermi problem from the perspective of the anthropological theory of didactics. In M. Pytlak, E. Swoboda, & T. Roland (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the European society for research in mathematics education*, (pp. 1010-1019), Rzeszów: University of Rzeszów.

Martins, G. O. (Coordenador) (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação - DGE.

NÉLIA AMADO

FCT, UNIVERSIDADE DO ALGARVE

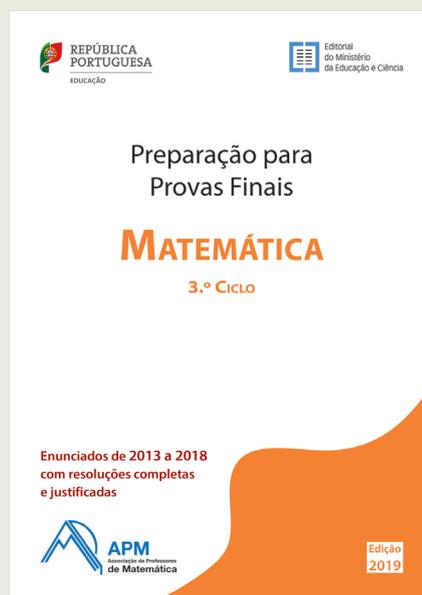
UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

SUSANA CARREIRA

FCT, UNIVERSIDADE DO ALGARVE

UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

APM



Preparação para Provas Finais de Matemática 3.º Ciclo

Enunciados 2013-2018 com resoluções completas

Já está disponível a versão atualizada desta publicação, com resoluções completas e justificadas, elaborada por equipas da Associação de Professores de Matemática.

À venda também na Loja da APM.

Venda ao público: **13,90€**;

Preço de sócio: **12,00€**