"Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!"

Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias

Hélia Jacinto

Susana Carreira

Nélia Amado

Os rápidos avanços tecnológicos e a crescente facilidade no acesso às mais sofisticadas ferramentas digitais têm vindo a alterar a forma como interagimos com o mundo. Essa rápida difusão e o uso constante de tecnologias digitais estão a impelir o estudo da sua influência na própria natureza do conhecimento matemático. Em particular, esta imersão no mundo tecnológico está a potenciar alterações ao nível das "capacidades matemáticas que são necessárias ao sucesso para além da escola" (Lesh, 2000, p. 177), sendo necessário ter em conta que estas ferramentas

> … introduzem novas situações de resolução de problemas nas quais a matemática é útil; introduzem novas normas e procedimentos para construção, argumentação e justificação; e expandem radicalmente o tipo de capacidades e compreensões matemáticas que contribuem para o sucesso nessas situações (Lesh, 2000, p. 178).

Apesar de a resolução de problemas ter recebido muita atenção da parte de investigadores e educadores na última parte do século XX, tem vindo a estar presente nos documentos curriculares de forma volátil. Em 2007, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* trouxe grande vitalidade à resolução de problemas, que passou a ser encarada como um objetivo geral do ensino da Matemática, como uma capacidade transversal e como uma metodologia de trabalho. Após um período em que esta importante capacidade foi reduzida à "seleção e aplicação de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados" (MEC, 2013, p. 5), surgem dois novos documentos orientadores que espelham uma perspetiva ampla e integradora.

As recomendações constantes do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (ME, 2017) e das *Aprendizagens Essenciais para o Ensino Básico e Secundário* (ME, 2018) estão em sintonia no que toca à aptidão para "encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão e à eventual formulação de novas questões" (ME, 2017, p. 14) destacando-se, de entre as competências associadas, o desenvolvimento de "processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados" (ME, 2017, p. 14). As *Aprendizagens Essenciais* referentes ao Ensino Básico abordam a resolução de problemas como um *conteúdo de aprendizagem* segundo o qual os alunos devem "resolver problemas (…) em contextos matemáticos e não matemáticos, concebendo e aplicando estratégias de resolução, incluindo a utilização de tecnologia, e avaliando a plausibilidade dos resultados" (ME, 2018, p. 7).

Neste artigo pretendemos discutir o papel da tecnologia na resolução de problemas de matemática e na comunicação das soluções produzidas por jovens participantes numa competição extraescolar de matemática. As resoluções de problemas que apresentaremos foram recolhidas através do projeto de investigação Problem@Web, com foco nos Campeonatos de Resolução de Problemas SUB12 e SUB14, dinamizados pelo Departamento de Matemática da Universidade do Algarve. O SUB14 destinava-se a alunos do 7.º e do 8.º ano, a frequentar escolas das regiões do Algarve e Alentejo. Quinzenalmente era publicado um novo problema no *website*[1] do campeonato e os participantes dispunham de duas semanas para submeter a sua resolução por *e-mail* ou através da página. As regras permitiam a utilização de quaisquer ferramentas tecnológicas para resolver os problemas mas, para serem consideradas corretas, as respostas tinham que incluir uma descrição detalhada e clara do processo de resolução seguido.

RESOLVER UM PROBLEMA E EXPLICAR A SOLUÇÃO: DUAS FACES DA MESMA ATIVIDADE

Os problemas propostos no campeonato SUB14 podem ser considerados *problemas não-rotineiros* na medida em que não se resolvem através da aplicação de regras ou processos comuns ou prontos a utilizar pelos alunos. Estes problemas requerem abordagens em que existe liberdade para construir, testar e

[1] http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/subs/sub14.html

modificar as estratégias planeadas. Esta atividade é encarada como o *desenvolvimento de formas produtivas de pensar sobre situações desafiadoras* (Lesh & Zawojewski, 2007), em que o aluno tem que adotar uma perspetiva matemática para encontrar a solução.

Na verdade, os participantes no SUB14 desenvolviam estratégias de resolução, muitas vezes, desprovidas de técnicas matemáticas formais, mas muito marcadas pela sua experiência pessoal, aspetos que vão ao encontro da ideia de que o conhecimento matemático é uma construção essencialmente humana e que a experiência pessoal do indivíduo tem um papel crucial na atividade de conhecer e interpretar a realidade de um ponto de vista matemático. Este envolvimento é consistente com o que Freudenthal (1973) designou por *processos de matematização*, ou seja, reflexões sobre a realidade que levam à sua compreensão e alteração através da (re)construção e da (re)organização de conteúdos ou métodos matemáticos. É este processo de *interpretação* dos dados e dos objetivos do problema que espoleta a necessidade de desenvolver um modelo conceptual da situação, ou seja, em vez de selecionar uma estratégia poderosa, os alunos têm que operar sobre a sua própria interpretação, têm que selecionar, aplicar ou criar procedimentos de forma cíclica ou iterativa, desenvolvendo assim a sua *abordagem*.

De facto, o cerne desta atividade reside na abordagem desenvolvida para obter a solução, e não apenas na própria solução pelo que envolve a produção de interpretações que se constroem e se desvendam a partir do pensamento matemático desenvolvido. Contudo, essa abordagem só fica completamente a descoberto mediante uma explicação pormenorizada dos processos seguidos, pelo que encontrar a solução de um problema comporta, igualmente, a necessidade de criar uma explicação para essa solução, ou seja, resolver um problema incorpora tanto a resposta solicitada como o reportar do processo seguido na sua obtenção.

As próprias regras de participação no SUB14 determinam o envio de uma justificação convincente que explique a solução, ou seja, implicam que cada concorrente pondere, intencional e conscientemente, o modo como exprime o seu raciocínio e como faz uso dos seus conhecimentos matemáticos durante o processo de encontrar a solução.

Um dos estudos desenvolvidos no âmbito do projeto Problem@Web mostrou precisamente que esta resolução de problemas compreende um processo síncrono de matematização e expressão do pensamento matemático (Carreira, Jones, Amado, Jacinto, & Nobre, 2016), o que quer dizer que a procura de uma resposta para o problema abre caminho para criar uma explicação dessa mesma solução. Consideramos, pois, que *resolver-e-exprimir problemas de matemática* resume a atividade em que os jovens participantes se envolvem.

Vejamos alguns exemplos. A resolução submetida por Cláudia ao problema "Até encher o tanque" (figura 1) é ilustrativa: a jovem começou por apresentar a solução final e, no texto subsequente, explicou o seu raciocínio (figura 2). O modelo conceptual implícito na sua abordagem indica que Cláudia procurou *matematizar* as duas condições do problema, referentes ao caudal de cada torneira, reconstruindo a sua interpretação dos dados e conferindo-lhe um aspeto algébrico. Cláudia deduziu o tempo necessário para que cada uma das torneiras encha meio tanque e, a partir daí, resolvendo uma equação de 1.º grau, concluiu sobre o tempo necessário para que as duas torneiras em simultâneo encham o remanescente do tanque.

O Sr. Bonifácio tem um tanque na sua horta que precisa de encher regularmente, podendo usar duas torneiras com caudais diferentes.

Uma das torneiras enche um tanque em 6 horas e outra torneira enche o mesmo tanque em 3 horas. Logo pela manhã, o Sr. Bonifácio viu o tanque vazio e abriu a primeira torneira (que deita menos). Quando o tanque estava a meio da sua capacidade decidiu abrir também a segunda torneira (que deita mais) para ser mais rápido. Quanto tempo demorou o tanque a encher, desde que ele abriu a primeira torneira?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 1. Enunciado do problema "Até encher o tanque"

Resposta:

O tanque demorou a encher 4 horas, desde que se abriu a primeira torneira, senão vejamos:

Quando de manhã o Senhor Bonifácio abriu a torneira que deita menos, esta demorou 3 horas até o tanque atingir metade da sua capacidade (V/2), pois esta torneira demora 6 horas a encher o tanque. (1) V/2=3h

Após ter atingido metade da capacidade do tanque o Senhor Bonifácio abriu também a segunda torneira que deita mais, designadamente o dobro do caudal da primeira, para encher a outra metade do tanque (V/2). Deste modo, temos que (2) V/2=t+2t.

Substituindo (1) em (2), temos quanto tempo demoram as duas torneiras a encherem a segunda metade do tanque:

3=3t <=> t=1h

Acrescentando as 3h que levou a encher a primeira metade do tanque, temos que desde que se abriu a primeira torneira o tanque demorou 4 horas a encher.

Figura 2. Resolução do problema "Até encher o tanque" submetida por Cláudia

Também a resolução enviada por Beatriz (figura 3) mostra a sua preocupação em expressar com clareza o processo seguido e o pensamento matemático que daí foi resultando. A jovem optou por reproduzir uma simulação do enchimento do tanque, primeiro considerando as condições de enchimento com a torneira 1 e, em seguida, com as torneiras 1 e 2. Aos dois esquemas e correspondentes legendas, Beatriz acrescentou uma descrição textual do seu raciocínio em que justificou a sua solução[2], explicando de que forma os esquemas lhe foram úteis. Nesta solução sobressai o esquema elaborado para ilustrar o processo de enchimento do tanque e que, por si só, suporta

[2] A solução contém uma imprecisão ao associar as duas partes a vermelhos (dois y), que representam as quantidades de água vertida pela torneira 1, com 2x, as quantidades vertidas pela torneira 2. Se assim fosse, o caudal seria o mesmo, pelo que as partes a vermelho deviam estar legendadas com um único y.

a solução encontrada. O esquema faz parte do processo de resolução e, em simultâneo, da explicação do seu raciocínio.

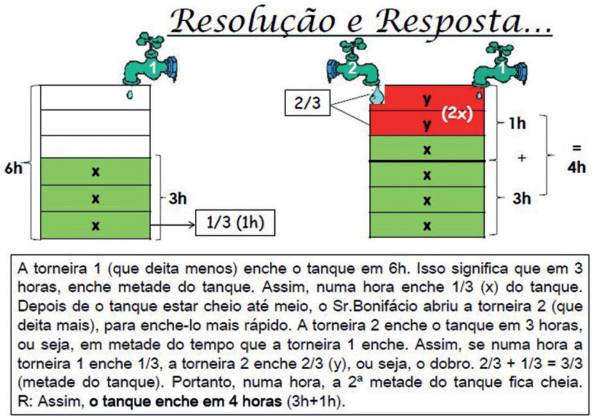

Figura 3. Resolução do problema "Até encher o tanque" submetida por Beatriz, construída em PowerPoint

RESOLVER-E-EXPRIMIR PROBLEMAS COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

A resolução de Beatriz destaca-se ainda por outro motivo — o uso de imagens de torneiras e de gotas de água de diferentes tamanhos, cores, chavetas e legendas — que não são uma mera representação pictórica pois têm um significado e uma intencionalidade matemática. A sua solução sugere que a reconstrução das condições do enunciado através do esquema foi revelando as relações implícitas entre os caudais das duas torneiras e o tempo necessário até encher o tanque. O esquema e os seus elementos pictóricos suportam uma intensificação da expressividade de Beatriz mas também dão corpo ao seu modelo conceptual, ou seja, a aluna mostra intencionalidade em produzir uma *solução que se explique a si própria*. A fase de procura da solução e a fase de explanação são facetas da resolução de problemas que estão intimamente relacionadas.

Esta relação entre o ato de resolver e o ato de exprimir torna-se mais robusta, e também mais notória, quando as tecnologias digitais estimulam o desenvolvimento de uma abordagem ao problema e suportam a expressão de pensamento matemático, não só na solução de Beatriz como noutras analisadas no âmbito do projeto Problem@Web (Carreira et al., 2016; Jacinto, 2017).

Tal como já referimos, as regras de participação não só estipulam que as soluções sejam comunicadas eletronicamente, como determinam o envio de uma justificação convincente que explique a solução, pelo que há que considerar que todo o material incorporado na solução final — para além do texto ou expressões matemáticas, todas as ilustrações, os esquemas, ou o uso de cores — permitem traçar um roteiro do pensamento matemático desenvolvido pelo jovem até obter a solução, ideia que vai ao encontro do que Lesh e Doerr (2003, p. 3) argumentaram:

> As descrições, explicações e construções não são apenas processos que os alunos utilizam ao longo do percurso de "obtenção da solução" e não são apenas pós-escritos que os alunos apresentam depois de terem obtido a "solução". De facto, SÃO as componentes mais importantes das respostas que se pretendem.

Durante o seu período de vigência, o SUB14 recebeu — e aceitou — resoluções convencionais, isto é, mais comuns no contexto da resolução de problemas com papel e lápis, na sala de aula. Mas, à medida que as tecnologias foram invadindo a sociedade e as escolas, notou-se também um número crescente de concorrentes que passaram a fazer usos expeditos de uma diversidade de ferramentas, umas mais matemáticas (e.g., GeoGebra, Excel), outras menos (e.g., PowerPoint, Word, Paint).

O problema "E lá se encontraram" (figura 4) envolve a ideia de covariação e pode considerar-se um problema de movimento, tendo originado dois modelos conceptuais bastante distintos: a maior parte dos participantes desenvolveu a sua solução considerando a viagem em desenvolvimento, enquanto um pequeno conjunto de soluções foram obtidas considerando a viagem já finalizada.

O Alexandre e o Bernardo vivem a uma distância de 22 km um do outro e querem encontrar-se, mas só têm uma forma de fazer o caminho… a pé! Nas férias decidem que irão ao encontro um do outro logo de manhã.
O Alexandre parte da sua casa às 8 horas da manhã e vai caminhando a uma velocidade de 4 km por hora. O Bernardo sai de casa uma hora mais tarde e caminha a uma velocidade de 5 km por hora.
Nenhum dos dois amigos levou relógio, mas é possível saber a que horas se encontraram. Que horas eram?
Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 4. Enunciado do problema "E lá se encontraram"

Resposta:
tempo que o Alexandre leva a fazer o percurso=t
tempo que o Bernardo leva a fazer o percurso=t-1
percurso feito pelo Alexandre= 4t
percurso feito pelo Bernardo= 5(t-1)
a soma destes percursos=22km
4t+5(t-1) =22
4t+5t-5=22
9t=27
t=3
R: Quando o Alexandre andou 3h e o Bernardo 2h encontraram-se, isto é às 11h

Figura 5. Resolução do problema "E lá se encontraram" submetida por Bruno

A figura 5 mostra uma resolução que tem por modelo conceptual a ideia de olhar para a viagem finalizada e recorre a uma linguagem algébrica formal. Nota-se que o jovem não incluiu qualquer tipo de esquema e partiu, precisamente, da definição de duas variáveis, estabelecendo uma relação entre elas escrevendo uma em função da outra. Formulou então uma equação e resolveu-a para encontrar o tempo decorrido até os dois amigos se encontrarem.

A resolução submetida por Lucas (figura 6), em PowerPoint, é exemplo de uma solução pictórica: a distância entre as casas dos dois amigos é representada por um segmento de reta dividido em intervalos de 2km, a posição relativa entre eles e entre cada um e a sua casa é representada pelos círculos claros e escuros. A variação do tempo encontra-se registada na margem esquerda, mostrando que cada variação da posição dos círculos corresponde a cada um dos instantes sucessivos, de meia em meia hora. A solução é encontrada quando os dois círculos se sobrepõem e que Lucas reforça na sua resposta final "Encontrar-se-ão às 11h".

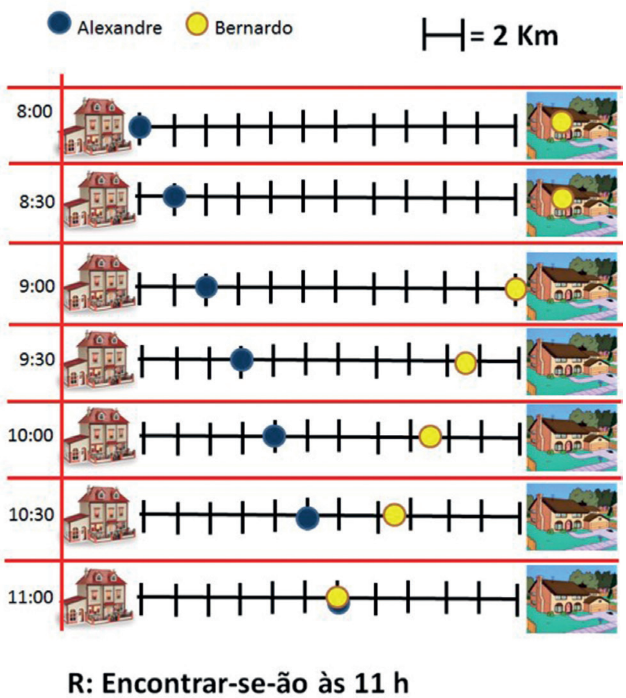

Figura 6. Resolução do problema "E lá se encontraram" submetida por Lucas

Novamente se salienta o uso de imagens, da cor, de legendas para construir um esquema que ilustra a situação a ser modelada. Torna-se bastante evidente que as representações digitais são meios efetivos de lidar com a ideia de uma viagem em desenvolvimento desde o momento inicial até ao momento do encontro, isto é, suportam um modelo conceptual de covariação entre a distância percorrida e o tempo, e ainda entre o deslocamento de cada um e o tempo decorrido (mais detalhes em Carreira et al., 2016).

Hoje em dia, a ideia de que *exprimir o que se pensa* é *parte integrante da resolução de problemas de matemática* ganha novos contornos pois expressar pensamento matemático requer considerar as ferramentas (digitais) adequadas. É nesse sentido que parece apropriado considerar que estes jovens, que comunicam matematicamente com recurso a ferramentas digitais, são fluentes num certo tipo de discurso matemático no qual a escrita continua a estar presente, embora não seja o único elemento nem necessariamente o mais evidente.

Num registo de *discurso expositivo*, um indivíduo "oferece-se para 'contar uma história' sobre como resolveu o problema" (Stahl, 2009 p. 49), ou seja, procede a uma narração que contém a sequência dos elementos essenciais da abordagem que conduziu à solução. Este tipo de discurso, de natureza matemática, "tem as suas próprias características, tais como fornecer garantias matemáticas das afirmações, determinar valores, abordar questões de lógica formal, etc." (p. 59). Mas tem também uma natureza tecnológica porque é produzido por meio de ferramentas digitais. Este discurso expositivo que é, simultaneamente, matemático e digital, possui assim outros atributos: o uso de diagramas, tabelas, imagens, legendas, símbolos, a simulação de movimento, o uso da cor para salientar aspetos específicos, o uso de ficheiros criados a partir de programas, ou ainda combinações entre eles, para nomear apenas algumas das possibilidades de utilização que os jovens identificam nestas tecnologias. Tal como referem Pantziara, Gagatsis e Elia (2009, p. 43):

> … a utilização de texto ou imagens serve para exprimir qualquer informação relacionada com o problema, pelo que nalguns casos podem até nem ser necessários para a solução do problema mas foram imprescindíveis para o desenvolvimento e a implementação de uma abordagem para obter a solução, no sentido em que têm o poder de "gerar conhecimento".

Estas componentes são consideradas fundamentais para compreender a atividade de resolver-e-exprimir problemas com tecnologias no sentido em que não suportam apenas o relato da sequência de processos seguidos, mas sobretudo contribuem para a conceptualização da estrutura matemática do problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de problemas de matemática com tecnologias deve ser encarada como um processo síncrono de matematização e de expressão do pensamento matemático, no seio do qual ocorre o desenvolvimento de modelos conceptuais das situações problemáticas num processo que é mediado por ferramentas digitais. Estas estruturas assentam em ideias e relações matemáticas, e facilitam a construção e o desenvolvimento de uma abordagem para encontrar a solução pretendida.

Argumentámos em torno da ideia de que resolver um problema e exprimir o raciocínio desenvolvido são aspetos fundamentais de uma mesma atividade, e que o processo de resolver-e-exprimir se torna mais robusto e visível quando a comunicação de pensamento matemático é mediada por ferramentas tecnológicas. Tal como é atualmente reconhecido nos documentos orientadores da prática letiva, o papel das tecnologias não é negligenciável, tendo-se visto como originam representações matemáticas digitais essenciais à resolução dos problemas.

Nos mesmos documentos encara-se a capacidade de comunicar matematicamente como o ser-se capaz de "exprimir, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, com precisão e rigor, para explicar e justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia)" (ME, 2018, p. 14). Todavia, facilmente se constata que nem todos os alunos se encontram num mesmo nível de matematização, pelo que a tecnologia pode ser um importante veículo que permite a todos os alunos experimentar sucesso com a resolução de problemas. As ferramentas tecnológicas abrem novas vias de comunicação, novas possibilidades representacionais, permitindo que alunos com diferentes desempenhos tenham voz. É pois, importante, legitimar essas outras formas de expressividade do pensamento matemático. Usar tecnologias para resolver-e-exprimir problemas pode espoletar o desenvolvimento de diferentes soluções que permitam uma matematização progressiva da situação dada, percorrendo soluções informais e estabelecendo pontes com outras mais formais e abstratas ou que usem uma linguagem simbólica.

Salientamos, por fim, que ser-se bem-sucedido na resolução de problemas de matemática envolve "coordenar experiências anteriores, conhecimento, representações familiares e padrões de inferência, e intuição, num esforço para gerar novas representações e padrões de inferência" (Lester & Kehle, 2003, p. 510). Assim, a mobilização "coordenada" de experiências, conhecimentos matemáticos, representações, é o motor que gera a criação de uma abordagem que permite superar o desconhecimento de estratégias ou representações de utilidade imediata para a obtenção da solução.

A "modernização", a "inovação", a "transformação" dos espaços escolares e das aprendizagens passa, necessariamente, por uma consciencialização e reconhecimento explícito de que estes jovens trazem conhecimentos, saberes e modos de agir aprendidos a partir de experiências de aprendizagem informais ou exteriores à sala de aula, de que o SUB14 é exemplo. Um dos maiores desafios que o professor de matemática do século XXI enfrenta é, pois, conseguir tirar partido desses conhecimentos nas suas aulas.

Referências

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web Project. New York, NY: Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Jacinto, H. (2017). *A atividade de resolução de problemas de Matemática com tecnologias e a fluência tecno-matemática de jovens do século XXI*. Tese de Doutoramento. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Lesh, R. (2000). Beyond constructivism: Identifying mathematical abilities that are most needed for success beyond school in an age of information. M*athematics Education Research Journal*, *12*(3), 177-195.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism – Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing and NCTM.

Lester, F., & Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism - Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 501-517). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 39-60.

Ministério da Educação (2017). *Perfil dos alunos à saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: DGE.

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais. Matemática, 7.º ano.* Lisboa: DGE.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: MEC.

Stahl, G. (2009). *Studying Virtual Math Teams.* New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0228-3.

Hélia Jacinto

Escola Secundária Poeta Joaquim Serra, Montijo, e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Susana Carreira

FCT, Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Nélia Amado

FCT, Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa