

GeoGebra no Ensino Aprendizagem da Trigonometria e Funções Trigonométricas

O ensino e aprendizagem da matemática pode ser potenciado pela utilização da tecnologia em contexto da aula, ajudando à compreensão dos conceitos através da manipulação das suas diferentes representações. Neste artigo procura-se mostrar como os conceitos trigonométricos são apreendidos pelos alunos do 11.º ano de escolaridade quando utilizam o *software GeoGebra* como ferramenta de trabalho. Em particular, pretende-se perceber o papel do *GeoGebra* na conversão entre as diferentes representações de objetos matemáticos e na comunicação matemática.

Para essa análise, utilizaram-se os conteúdos programáticos do domínio Trigonometria e Funções Trigonométricas que são apresentados aos alunos do Ensino Secundário no início do 11.º ano.

INTRODUÇÃO

Uma das principais características de um *software* de Geometria Dinâmica é a possibilidade de movimentar os objetos no ecrã do computador (folha gráfica) sem alterar as propriedades da construção inicial, o que permite, investigar, descobrir, confirmar resultados e fazer simulações, permitindo, inclusive, levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática.

Ferramentas computacionais como o Cabri Géomètre, Geometer's Sketchpad, ou o GeoGebra permitem a construção e manipulação de objetos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objetos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes. Possibilitam ainda um contexto que promove a discussão professor-aluno e aluno-aluno, acerca dos objetos e propriedades observadas, favorecendo a comunicação entre pares e professor-aluno.

O *GeoGebra* é um *software* de Matemática dinâmica que combina a facilidade de utilização de um *software* de geometria dinâmica com alguns recursos de um sistema CAS (*Computer Algebra System*) que permite manipulação simbólica de expressões e uma folha de cálculo. Entre outras funcionalidades, o *GeoGebra* permite trabalhar em simultâneo com janelas/folhas diferentes (figura 1): gráfica; algébrica e numérica; CAS; folha de cálculo; e permite visualizar, em simultâneo, diferentes representações de um mesmo objeto matemático.

Assim, diferentes representações de um mesmo objeto matemático estão relacionadas dinamicamente de tal forma

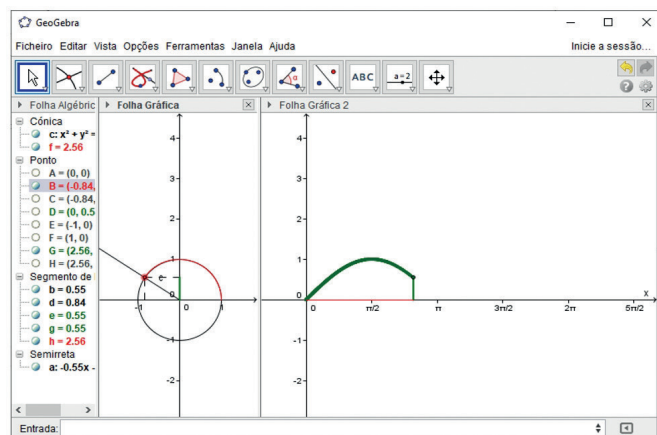


Figura 1. Janela GeoGebra com folha algébrica e duas folhas gráficas 2D

que cada representação se adapta automaticamente a mudanças efetuadas em qualquer das outras representações, independentemente da representação utilizada inicialmente para “definir/construir” o objeto.

A capacidade de efetuar conversões entre diferentes representações de um mesmo objeto é, segundo Duval (1993), condição absolutamente necessária para a formação de conceitos matemáticos. Por exemplo, o NCTM afirma que “o poder gráfico das ferramentas tecnológicas possibilita o acesso a modelos visuais que são muito poderosos, mas que muitos alunos são incapazes ou não estão dispostos a realizar de modo independente” (NCTM, 2007, p. 27).

Segundo Costa (1997) um dos obstáculos no estudo das funções trigonométricas, refere-se ao estatuto dos objetos trigonométricos. Costa assinala a dificuldade de compreensão do estatuto dos objetos trigonométricos, uma vez que estes surgem inicialmente no quadro geométrico e numérico associados ao triângulo retângulo, mais especificamente, na resolução de problemas envolvendo triângulos retângulos, sem características funcionais. Para se passar ao estudo das funções trigonométricas é necessário estender as definições de seno, cosseno e tangente ao ângulo generalizado, relacionar estas definições com o sistema de coordenadas cartesianas e estabelecer a correspondência entre a abscissa, x , de cada ponto da reta real, com o respetivo seno e cosseno do ângulo de amplitude, medida em radianos, igual a x .

CONTEXTO EDUCATIVO

Nos próximos pontos, apresentam-se excertos de diálogos que ocorreram durante entrevistas realizadas a dois alunos da turma envolvida na investigação, a Laura e o Pedro (nomes fictícios para preservar a identidade dos mesmos), onde se procura, analisando as resoluções por eles apresentadas relativas a uma tarefa (figura 2), compreender se o ambiente de trabalho possibilitado pela mediação do GeoGebra, favorece as aprendizagens e a comunicação.

Com esta tarefa, de carácter eminentemente prático, pretendia-se ajudar os alunos a atingir os seguintes objetivos: identificar as transformações geométricas que permitem obter o gráfico

cartesiano de uma função real de variável real da família $f(x) = a \sin(bx + c) + d$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $c, d \in \mathbb{R}$, como imagem geométrica do gráfico cartesiano da função seno; identificar, por análise do seu gráfico cartesiano e/ou expressão analítica, o contradomínio e o período fundamental de funções desta família; determinar uma expressão analítica de uma função trigonométrica que verifique determinadas propriedades ou da qual se conhece parte da sua representação gráfica. Pretendia-se ainda, com mediação do GeoGebra, favorecer a comunicação.

A tarefa foi apresentada aos alunos em suporte de papel e, para a resolver, os alunos dispunham de um computador equipado com o software GeoGebra.

Tarefa 1

- Na caixa de entrada da folha gráfica introduz cada uma das funções reais de variável real definidas pelas expressões apresentadas na tabela seguinte. Depois, na folha algébrica do GeoGebra, desativa todas as funções exceto a função f .

Nota: deves configurar a folha gráfica de forma que, no eixo Ox , a “unidade de escala” seja π e a distância entre marcas $\frac{\pi}{2}$.

$f(x) = \sin x$	$g(x) = 2 + \sin x$	$h(x) = -1 + \sin x$	$i(x) = 3 \sin x$
$j(x) = 4 \sin x$	$k(x) = -3 \sin x$	$l(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$m(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$n(x) = \sin(x + \pi)$	$o(x) = \sin(2x)$	$p(x) = \sin(3x)$	$q(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

- Na folha algébrica do GeoGebra ativa uma função de cada vez e completa a tabela seguinte:

Função	Domínio	Contradomínio	Período fundamental
f			
g			
h			
i			
j			
k			
l			
m			
n			
o			
p			
q			

- Num pequeno texto identifica as transformações geométricas que permitem obter os gráficos de cada uma das funções referidas em cada alínea como imagem do gráfico da função f e quais as alterações que se verificam em relação ao contradomínio e período fundamental.
- Determina uma expressão para a função cujo gráfico pode ser obtido como imagem do gráfico da função definida pela expressão $f(x) = \sin(x)$ e verifica as seguintes propriedades:
 - tem contradomínio $[1, 3]$ e período $\frac{\pi}{2}$.
 - tem contradomínio $[-1, 3]$, período π .
- Escreve uma expressão que defina a função real de variável real representada em referencial ortogonal xOy na figura seguinte.

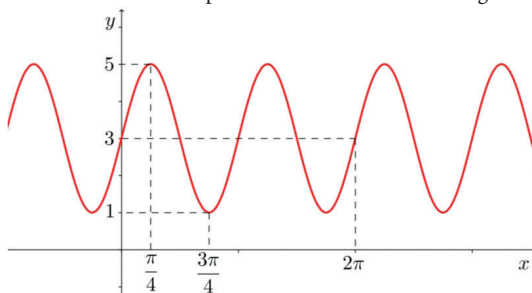


Figura 2.

Os diálogos professor/aluno ocorrem após os alunos terem resolvido as tarefas e têm por objetivo ajudar os alunos a comunicar os resultados, a consolidar os conceitos envolvidos e corrigir eventuais erros e, simultaneamente, ajudar o professor a perceber a forma como os alunos aprenderam os conceitos matemáticos envolvidos na tarefa.

No diálogo seguinte, entre a Laura e o professor, pode observar-se como a presença do GeoGebra pode favorecer a comunicação, ajudando a aluna a reconhecer o erro cometido na identificação do período fundamental da função r.v.r. definida por $p(x) = \sin(3x)$ e a corrigi-lo.

[...]

Professor: Na função p indica o período fundamental como sendo igual a $\frac{\pi}{2}$...

L.: Sim.

Professor: Pode explicar-me como obteve esse valor?

[A Laura ativa as representações gráficas do seno e da função (figura 3) observa-as e, aparentemente, fica confusa].

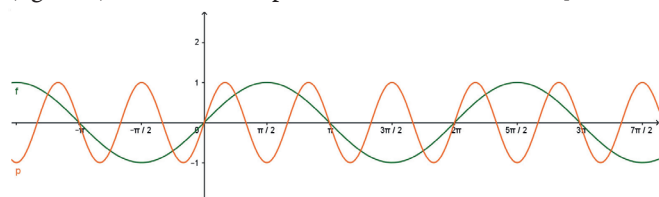


Figura 3. Representações gráficas das funções definidas por $f(x) = \sin x$ e $p(x) = \sin(3x)$

Professor: Pode indicar-me onde posso observar, no gráfico, o período fundamental de p ?

L.: Começa aqui [aponta para a origem do referencial] e termina aqui [aponta o ponto de coordenadas $(\frac{2\pi}{3}, 0)$, cujas coordenadas não estão identificadas no referencial].

[o semblante da Laura mostra que percebe o erro mas tem dificuldade em avançar].

Apercebendo-se da dificuldade da aluna o professor lança nova questão:

Professor: Quantas vezes cabe o período fundamental no intervalo $[0, 2\pi[$?

L.: Penso que três vezes. Sim, é isso, aqui, aqui e aqui [apontando, na folha gráfica, para os pontos de abscissas $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e 2π].

Professor: Então, o período fundamental de p é?

L.: 2π dividido por 3.

Comparando, por sugestão do professor, os gráficos da função p e da função seno a Laura consegue identificar o erro cometido e, em diálogo com o professor, mediado pelo GeoGebra, reconhecer a relação entre os períodos fundamentais das duas funções, o que lhe permite obter o valor pedido.

No diálogo seguinte, entre o Pedro e o professor, pode observar-se a importância do GeoGebra quer no que se refere às conversões entre as representações algébrica e gráfica, favorecendo o desenvolvimento dos invariantes operatórios relativos a cada transformação e/ou à composição das mesmas, quer no que refere à argumentação do aluno.

P.: ... O contradomínio é fácil, sabemos que o seno está entre -1 e 1, por isso é só ver as transformações, que com os gráficos, é mais fácil, olhamos para um e outro e vê-se logo.

Professor: E para o período fundamental como fez?

P.: Comparei com a função seno.

Professor: Como assim?

P.: Quando só há translações, o gráfico só se desloca para cima, ou para baixo, para a esquerda ou direita, por isso o período fica na mesma. O período também não se altera quando se multiplica o seno por um número.

Professor: Porquê?

P.: Porque nesse caso o gráfico tem uma dilatação vertical, mas na horizontal fica tudo na mesma.

Professor: O que quer dizer com fica tudo na mesma?

[O Pedro ativa as funções i , j e h e argumenta (figura 4)]

P.: Quando olhamos para o gráfico destas funções vemos que o período fundamental começa aqui [apontando, na folha gráfica,

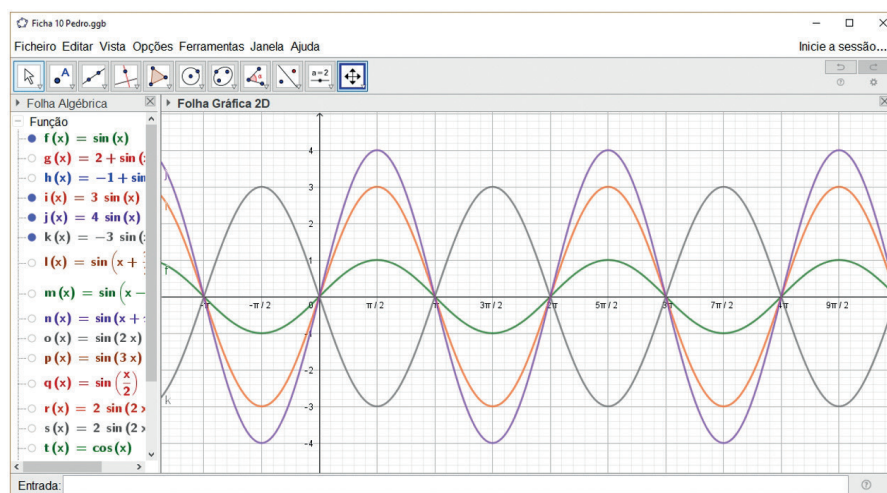


Figura 4. Folha gráfica apresentada pelo Pedro com as funções f , i , j e h .

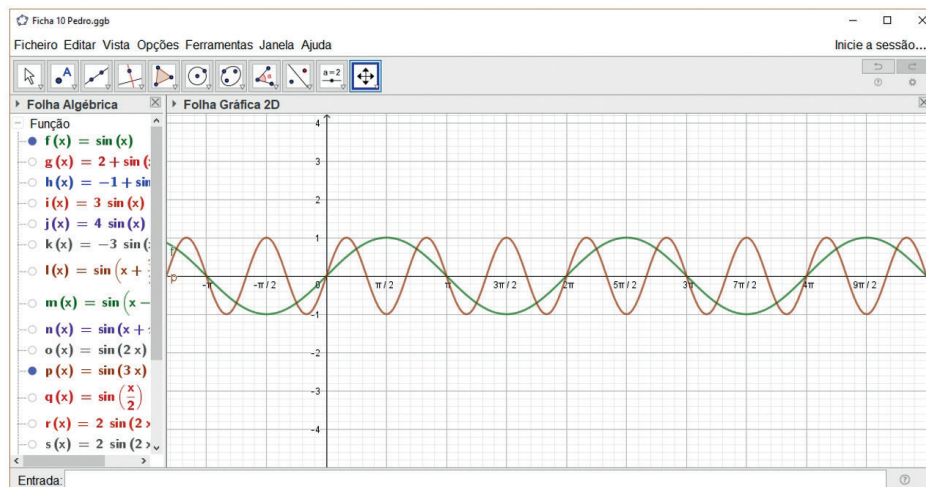


Figura 5. Folha gráfica com as funções f (função seno) e p (definida por $p(x) = \sin(3x)$) ativas.

para o ponto de coordenadas $(0, 0)$ e acaba aqui [apontando para o ponto de coordenadas $(2\pi, 0)$].

P.: Estas aqui é que foram mais difíceis [referindo-se às funções o , p e q]. No contradomínio não, mas no período fundamental fiquei um bocado baralhado...

Professor: Então, como resolveu o problema?

P.: Comparando os gráficos com o do seno.

[...]

P: Mas o pior foi na função p [ativa o gráfico da função]. Aqui onde acaba a volta [aponta para o ponto de coordenadas $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ (figura 5)] não aparece nenhum número. Fica mais difícil assim. Mas depois, comparando, os gráficos, vê-se que o período da função seno é três vezes maior que o da função p . Depois lembrei-me que isto tem a ver com as dilatações e contrações horizontais e, como neste caso o coeficiente é $\frac{1}{3}$, fica $\frac{2\pi}{3}$.

No seu discurso, o Pedro recorre frequentemente às representações gráficas obtidas no GeoGebra, para sustentar as suas asserções. A comparação dos gráficos cartesianos das diferentes funções com o gráfico da função seno permitem que o Pedro identifique as transformações geométricas associadas a cada um dos parâmetros bem como as propriedades que se mantêm invariantes. A possibilidade de recorrer ao GeoGebra ajuda o Pedro a clarificar os conceitos matemáticos envolvidos na resolução da tarefa e na organização da sua argumentação, favorecendo assim a comunicação e a aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os diálogos apresentados reforçam a ideia de que ambientes de Geometria Dinâmica mediados por *softwares* como o GeoGebra, porque permitem uma forte ligação entre as diferentes representações de um mesmo objeto matemático, melhorando assim a capacidade de conversão entre as mesmas, favorecem as aprendizagens e promovem a argumentação e a comunicação matemática, ajudando a detetar e ultrapassar erros.

Assim, porque a apropriação do GeoGebra é feita à medida que os alunos o vão integrando na sua atividade, a sua utilização permite o acesso à visualização de conceitos/objetos matemáticos, o que favorece os diálogos dos alunos com o professor, permitindo ao professor entender melhor o pensamento do aluno mediado pelo GeoGebra e ao aluno uma melhor regulação das suas aprendizagens.

Parece-nos por isso que a utilização do GeoGebra, ou outros softwares de Matemática Dinâmica, deve ser incentivada quer dentro quer fora da sala de aula, promovendo o trabalho autónomo dos alunos e tornando-os agentes da sua própria aprendizagem.

Referências

- Costa, N. (1997). *Funções Seno e Cosseno: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental" e do computador*. Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Acedido em <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11139>
- Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A Matemática no início do superior*. Tese de Doutoramento. Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia-Universidade Nova de Lisboa.
- Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 5. IREM – ULP, Strasbourg.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

EMANUEL MARTINHO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS D. MARIA II – CACÉM

ANTÓNIO DOMINGOS

FCT-UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA