Comunicando aprendizagens em análise combinatória

Belmira Mota
Rosa Antónia Tomás Ferreira

Desde há várias décadas que diversos documentos orientadores dos currículos, a nível nacional e internacional, sublinham a importância do desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática na aprendizagem desta disciplina. Os alunos devem ser capazes de comunicar o seu pensamento matemático de modo claro e coerente; analisar e avaliar o pensamento e as estratégias de outras pessoas; e usar a linguagem matemática para expressarem as suas ideias de modo adequado (NCTM, 2000). Para isso, os professores devem criar-lhes "oportunidades frequentes para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de matemática (e fora delas) pois assim estarão a organizar, consolidar e ampliar o seu conhecimento matemático" (ME, 2001, p. 11).

Mais recentemente, o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (ME, 2017) alerta para o desenvolvimento da capacidade de comunicar ideias e raciocínios, na interpretação de informação e resolução de situações problemáticas, entre outras, e as *Aprendizagens Essenciais de Matemática A*, para o 12.º ano, sublinham também que "os estudantes devem ter oportunidade de descobrir, raciocinar, provar e comunicar matemática" (ME, 2018, p. 3). Neste sentido, estes dois documentos orientadores do currículo revitalizam a importância da comunicação matemática nas aprendizagens e percurso escolar dos alunos.

Neste texto, partilhamos alguns resultados de uma experiência de ensino realizada com alunos do 12.º ano de escolaridade, destacando como os alunos comunicaram as suas aprendizagens em Análise Combinatória, através da formulação de problemas e recorrendo às tecnologias digitais. Começamos por tecer algumas considerações sobre o ensino-aprendizagem da Análise Combinatória; de seguida, descrevemos, de forma breve, o ambiente exploratório de ensino-aprendizagem que foi desenvolvido com os alunos na unidade de Análise Combinatória e analisamos algumas das suas produções a um desafio que lhes foi colocado com o objetivo de, através de produções multimédia, comunicarem as suas aprendizagens neste tema algum tempo depois da sua lecionação.

A APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Vários autores defendem a necessidade de estudar os processos de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória (AC), dado ser um tema que a maioria dos alunos considera difícil de aprender e os professores de ensinar (e.g., Lockwood, 2013). Além disso, ao estar diretamente relacionada com vários ramos da Matemática e com outras disciplinas, a AC providencia ferramentas extremamente úteis para lidar com problemas do quotidiano e da vida profissional (Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

O estudo da AC, no contexto do programa de Matemática A do 12.º ano de escolaridade, surgia associado ao tema do cálculo de probabilidades do programa em vigor aquando da realização da experiência reportada neste artigo. Este programa sublinhava que "As técnicas de contagem (...) constituem uma aprendizagem significativa por si só" (ME, 2002, p. 1) e incentivava a sua utilização na construção de conexões com as outras ciências.

A aprendizagem da Análise Combinatória não exige um elevado número de pré-requisitos e, apesar das documentadas dificuldades existentes nesse processo, é comum surgirem alunos que, manifestando dificuldades em outras áreas da Matemática, aprendem este tema sem experienciarem como obstáculos a falta de conhecimentos anteriores. Por outro lado, existem alunos com um excelente aproveitamento na disciplina de Matemática que não se sentem tão à vontade no tema da AC, manifestando inseguranças que tipicamente não experienciam na aprendizagem de outros temas. É comum ouvir frases como: "E neste? São arranjos ou combinações?"; "Soma-se ou multiplica-se?"

O trabalho dos alunos em AC pode ter um papel fundamental no desenvolvimento das suas capacidades de ordem superior, tais como a resolução e formulação de problemas e a comunicação matemática. Em sala de aula, os alunos são tipicamente confrontados com situações novas e de carácter problemático, sendo obrigados a relacionar dados para encontrar as respostas aos desafios propostos e não se podendo limitar ao uso do raciocínio por analogia ou à mecanização de procedimentos. Além disso, o trabalho dos alunos em AC potencia a partilha e o confronto de abordagens usadas para resolver as tarefas, estimulando assim a comunicação matemática entre os diferentes agentes no processo de ensino-aprendizagem. Em particular, o facto da AC estar associada a situações do quotidiano pode estar na origem da presença deste tema em conversas informais dos alunos, quer no seio familiar, quer junto dos amigos. Neste sentido, a aprendizagem da AC aproxima-os da Matemática e pode motivá-los para o seu estudo.

Assim, dado o aparente paradoxo que surge quando algo tão simples como contar (um processo em que os alunos se envolvem muito antes de iniciarem o seu percurso escolar) se pode tornar tão complexo à medida que os alunos progridem na sua escolaridade, é importante conhecer e entender as suas principais dificuldades na aprendizagem da AC, bem como as razões inerentes à sua existência. Neste sentido, conduzimos uma experiência de ensino, com uma turma de 31 alunos do 12.º ano de Matemática A, procurando ajudar os alunos a desenvolver uma aprendizagem com significado dos principais conceitos da AC e a dar sentido às operações combinatórias.

AS AULAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A experiência de ensino realizada decorreu ao longo de 12 aulas de 90 minutos cada. As duas primeiras aulas foram dedicadas ao princípio fundamental da contagem, enfatizando a importância de distinguir situações de natureza multiplicativa das de natureza aditiva. Relativamente às operações combinatórias (arranjos e combinações), as tarefas desenhadas pretenderam conduzir os alunos à dedução das respetivas fórmulas.

De facto, as tarefas propostas aos alunos constituem a base sobre a qual eles desenvolvem a sua atividade matemática e, portanto, são um fator determinante, embora não isolado, da qualidade das aprendizagens dos alunos (Ponte, 2005). Na experiência de ensino realizada, privilegiámos as tarefas contextualizadas, isto é, tarefas inseridas num contexto que seja concebível na mente do aluno (Shannon, 2007). Uma das potencialidades destas tarefas é, precisamente, devido à familiaridade dos contextos para os alunos a que se destinam, promoverem a comunicação matemática, estimulando-os a explicar as suas ideias e a argumentar as suas formas de pensar.

Os alunos trabalharam num ambiente de ensino-aprendizagem exploratório (Oliveira, Canavarro, & Menezes, 2013), caracterizado por quatro fases: 1) a *introdução* da tarefa pela professora; 2) a *realização* da tarefa pelos alunos, de forma autónoma e em pequenos grupos de três ou quatro elementos; 3) a *discussão coletiva* dos resultados obtidos, orquestrada pela professora e com a participação de grupos selecionados para o efeito, refletindo o número de abordagens que emergiram durante o seu trabalho na tarefa; e 4) a *sistematização das aprendizagens* pela professora com a colaboração dos alunos.

Ao longo das aulas, os alunos foram incentivados a dialogar de forma construtiva (entre eles, no seio do seu grupo de trabalho e, posteriormente, com a turma), e a apresentar as suas dúvidas e expor os raciocínios usados na resolução das tarefas propostas, oralmente e por escrito. Foram, ainda, estimulados a partilhar todas as estratégias utilizadas: as que conduziram ao sucesso na resolução das tarefas, assim como as que se vieram a verificar incorretas.

DESAFIO: CRIAR SITUAÇÕES QUE ENVOLVAM A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Com o rápido desenvolvimento tecnológico, novas formas de comunicar matemática, e de promover essa comunicação, podem ser equacionadas. Os conceitos matemáticos podem expressar-se através da dramatização de situações ou do recurso a ferramentas digitais, por exemplo. Ao processo de comunicar matemática através da simbiose entre a arte e as tecnologias digitais dá-se o nome de Desempenho Matemático Digital (Silva, 2015), que pode, assim, ser concretizado através de vídeos, teatros, atuações musicais, etc. Foi precisamente isto que foi proposto aos alunos, aliado à atividade de formulação de problemas.

> A par da resolução de problemas, a formulação de problemas é uma atividade de importância inquestionável, pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução. (Boavida et al., 2008, p. 27)

Entre outros aspetos, a formulação de problemas exige clareza e precisão na expressão de ideias, ajudando, assim, a desenvolver a comunicação matemática também. Existem várias estratégias de formulação de problemas. A estratégia "E se em vez de?" relaciona-se com a modificação de um ou mais aspetos de problemas existentes; a estratégia "Aceitando os dados" prende-se com a criação de problemas a partir de uma situação escolhida ou igualmente criada. Um aspeto importante a ter na atividade de formulação de problemas é que os alunos devem ser capazes de resolver os problemas que criam, usando uma ou outra estratégia de formulação.

Ao longo do segundo período, os sete grupos de alunos foram desafiados a realizar uma produção multimédia, apresentando situações distintas onde fosse aplicada a AC. O objetivo deste desafio era percebermos que aprendizagens tinham realizado e como as conseguiam comunicar. A adesão a este desafio era facultativa e os alunos não seriam penalizados se optassem por não o realizar.

No entanto, apesar destes alunos frequentarem um ano que requer um esforço suplementar, dado serem submetidos a exames nacionais e já estarem preocupados com o acesso ao ensino superior, todos os grupos (que denominamos por A, B, C, D, E, F, G) aderiram ao desafio. Na verdade, embora não lhes tivesse sido pedido para formular problemas de AC, os alunos apresentaram situações distintas, todas elas inseridas em contextos que lhes eram familiares, tal como descrito no quadro da figura 1, e formularam problemas, com base nessas situações, recorrendo à estratégia "Aceitando os dados" de modo intuitivo.

Grupo	Situações
A	O grupo centrou a sua história em quatro amigos estão em casa e decidem ver um filme. Vão surgindo situações em que é necessário aplicar operações combinatórias, começando pelo número de maneiras diferentes com que se podem sentar no sofá.
B	O grupo encontra-se na escola e vai-se deparando com situações em que é necessário contabilizar todas as hipóteses possíveis, como por exemplo, comprar uma caneta, uma borracha e um lápis.
C	O grupo centrou a sua história numa personagem fictícia, o Gonçalo e nas suas aventuras, agora que é um caloiro da faculdade.
D	O grupo encontra-se na escola e vai-se deparando com situações em que é necessário contabilizar todas as hipóteses possíveis, como por exemplo, ordenar os três primeiros classificados do campeonato de futebol organizado na escola.
E	O grupo descreveu uma ida ao *shopping* de quatro amigas criando diversas situações onde aplicam as diferentes operações combinatórias.
F	O grupo recorre a exemplos distintos, tais como as eleições presidenciais ou a pirâmide dos alimentos.
G	O grupo descreveu um dia na escola e, a partir daí, criou várias questões cuja resolução envolve a aplicação das operações combinatórias.

Figura 1. Situações das produções multimédia realizadas pelos diferentes grupos

Os quatro primeiros grupos gravaram situações em que os próprios alunos interagiam entre si na ilustração das situações combinatórias, dramatizando-as. Os três últimos grupos elaboraram uma produção multimédia com sucessivas imagens onde apresentaram vários problemas combinatórios e respetivas resoluções.

Ao longo da experiência de ensino realizada, os esquemas e diagramas revelaram-se fundamentais, tanto para a compreensão das situações problemáticas apresentadas aos alunos, como para a resolução dessas situações, como ainda para a comunicação das estratégias desenvolvidas a terceiros. Estes aspetos refletiram-se nas produções multimédia dos alunos, como ilustrado na figura 2.

Baseados nas situações escolhidas, todos os grupos criaram problemas combinatórios, mais ou menos complexos, mas todos contextualizados (no sentido anteriormente exposto). A figura 3 apresenta as operações combinatórias a que os alunos recorreram para resolver os problemas por eles criados. As permutações foram utilizadas por todos os grupos, ao que se seguiram os arranjos sem repetição e as combinações e, por último, os arranjos com repetição.

Permutações	Arranjos sem repetição	Arranjos com repetição	Combinações
A, B, C, D, E, F, G	A, B, C, D, F	B, C, D, E	A, B, C, D, E, G

Figura 3. Operações combinatórias usadas pelos sete grupos de alunos

No caso das permutações, alguns grupos criaram problemas muito simples, cuja resposta era $n!$ (sendo n um número natural). Outros grupos apresentaram situações mais complexas de permutações. A figura 4 contém dois exemplos ilustrativos.

Todos os grupos que apresentaram situações envolvendo combinações sentiram a necessidade de explicar a razão de recorrer a esta operação combinatória e não a arranjos sem repetição. A isto não é certamente alheia a ênfase que foi dada nas aulas à distinção entre estas duas operações combinatórias durante o primeiro período, altura em que o tema da AC foi trabalhado com os alunos. Na figura 5, essa necessidade está explícita nas dramatizações feitas pelos alunos de dois grupos que aqui servem de exemplo.

As situações que implicavam a utilização de arranjos sem repetição foram diversas. Porém, todos os grupos explicaram o facto de, nessas situações em concreto, estarem perante uma sequência e, portanto, o mesmo conjunto ser contabilizado tantas vezes quantas o número de sequências que é possível constituir com os elementos que lhe pertencem. Na figura 6, apresentamos

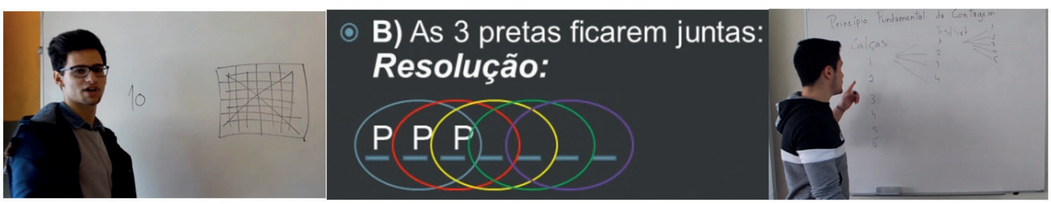


Figura 2. Exemplos de diagramas e esquemas elaborados pelos alunos e incluídos nas suas produções multimédia

A Marta decidiu ir a um rodízio de Pizzas.
Tinha 15 pizzas à disposição. As pizzas vão chegando, uma de cada vez, numa ordem aleatória. De quantas ordens diferentes podem as pizzas chegar à mesa?

1ª vez - 15 hipóteses
2ª vez - 14 hipóteses (já comeu uma das variedades de pizza)
3ª vez - 13 hipóteses
(...)
14ª vez - 2 hipóteses (já comeu 13 pizzas)
15ª vez - 1 hipótese (já comeu todas as restantes)
15x14x13(...)x2x1=15!

Ao chegarem à escola os quatro amigos constataram que de facto hoje era um dia em que estavam especialmente bonitos e bem parecidos e bora lá, tirar uma foto!!!
Contudo, quando se trata de tirar fotos... Todo o mundo aparece!!!
Assim, ficamos 7: Três raparigas e quatro rapazes. Mas é certo e sabido que a Taninha e o Miguel têm de ficar juntos. Posto isto, qual é o número de fotografias possíveis para que o casal fique junto e, cada uma das extremidades fique ocupada por uma rapariga?

-Tendo o casal de ficar junto, eles vão funcionar como um, podendo apenas permutar entre eles.

-A primeira extremidade tem duas hipóteses de meninas, o que implica que a última extremidade só tenha uma. Assim, existem 2! maneiras de as duas meninas se colocarem para a foto.

-Os 3 meninos e o casal (que funciona como um), vão ter 4! formas diferentes de se posicionarem.

-Ora, assim, por cada 2! fatorial maneiras das meninas se colocarem, há 4! maneiras diferentes dos meninos e o casal se posicionar sendo que há ainda, por cada uma destas, 2! maneiras que corresponde à permuta dentro do casal, ou seja, há:

2! X 4! X 2! = 96 fotografias diferentes.

Figura 4. Exemplos ilustrativos da utilização das permutações

Quatro amigos sentados no sofá.
Vieira: Alguém tem fome ou sou só eu?
Adão: Querem comer alguma coisa?
Zé: Não me importava... Se pudesses trazer...
Adão: Não. Alguém tem de vir comigo buscar.
Restantes: Ei!!! Não me apetecia nada.
João: Bem. Há 6 hipóteses possíveis.
Vieira: Porquê 6?
João: ${}^4C_2$
Restantes: *?*
João: *Sim.* ${}^4C_2$.
Adão: *E porque é que não é arranjos?*
João: *A diferença das combinações com os arranjos é que: eu e tu e tu e eu é a mesma coisa.*
Adão: *Zé, então vens tu comigo.*
Zé: *E porque é que tenho de ser eu? Ele é que entende de matemática!!!*

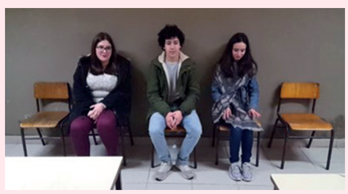
Foi sorteada uma viagem a três alunos da turma do Gonçalo. Eles queriam saber de quantas maneiras diferentes poderiam fazer para levarem os alunos à viagem. Sabendo que a turma do Gonçalo tem 36 alunos podiam utilizar os arranjos para chegar ao número pretendido: ${}^{36}A_3$. *Mas aqui a ordem importa. Portanto, não podíamos fazer isto.*

Figura 5. Exemplos ilustrativos da utilização das combinações

Quatro amigos sentados no sofá.
Zé: E se por acaso dois de nós fossem buscar um pacote de batatas fritas e coca-cola?
João: Aí já era diferente. Porque, por exemplo, eu e tu, se fosse eu buscar a coca-cola e tu as batatas fritas, era diferente de eu ir buscar as batatas fritas e tu a coca-cola. Nesse caso, daria ${}^4A_2$ que é 12.

Temos aqui cinco cadeiras

Se estes três amigos trocarem de cadeiras



formam uma sequência diferente

e se trocarem entre si, também formam uma sequência diferente.

Assim é possível formar ${}^5A_3$ *sequências diferentes, ou seja, 60 sequências diferentes.*

Figura 6. Exemplos ilustrativos da utilização dos arranjos sem repetição

Quando chegou do passeio, o Gonçalo tinha algumas recordações para arrumar. Entre elas tinha alguns bonecos, umas medalhas e alguns troféus. A sua mãe, como já sabia que ele era muito desorganizado nas arrumações, deu-lhe quatro caixas para arrumar tudo.

Sabendo que tinha oito bonecos todos diferentes, quatro medalhas e dois trofeus, de quantas maneiras diferentes é que o Gonçalo pode arrumar tudo nas quatro caixas, sabendo que algumas podem ficar vazias?

Ao todo, ele tem 14 recordações e tem quatro caixas para meter cada uma delas. A primeira recordação tem 4 hipóteses, a segunda recordação tem mais 4 hipóteses, assim sucessivamente até à décima quarta recordação, ou seja, o Gonçalo, para arrumar todas as suas recordações tem 4^{14} maneiras diferentes.

Era uma vez, quatro amigas, a Paula, a Maria, a Marisa e a Jéssica. Certo dia, resolveram ir ao shopping. Sabendo que estas pretendem comprar roupa e que as suas lojas de eleição são: Bershka, Stradivarius, Zara, Pull&Bear, Tiffosi, Mango e New Yorker, de quantas maneiras as amigas se pode distribuir pelas lojas?

Resolução:

Existem 7 lojas distintas sob as quais as 4 amigas se podem distribuir. Cada uma das amigas tem 7 hipóteses para a primeira loja e assim sucessivamente. Assim, existem **7x7x7x7= 7^4** maneiras de elas se distribuírem pelas lojas.

- ***R:*** **7^4= 2401** maneiras.

Figura 7. Exemplos ilustrativos da utilização dos arranjos com repetição

dois exemplos em que os alunos explicitam a diferença entre combinações e arranjos sem repetição.

Os arranjos com repetição foram a operação combinatória menos utilizada. Este facto não nos surpreendeu pois foi também esta a operação combinatória que mais dificuldades colocou aos alunos durante as aulas de AC. Era-lhes particularmente difícil identificar situações de arranjos com repetição e, mesmo quando as identificavam corretamente, cometiam, com frequência, erros na aplicação da respetiva fórmula. Porém, surgiram problemas interessantes e em contextos distintos, como ilustrado na figura 7.

O grau de complexidade dos problemas apresentados nas produções multimédia dos alunos variou entre uma aplicação direta das operações combinatórias (todos os grupos), o cálculo de probabilidades (grupos E e F) e a aplicação de múltiplas operações combinatórias (grupos C e F). Todos os problemas apresentados até agora ilustram situações cuja resolução consiste na aplicação direta duma operação combinatória. No problema apresentado na figura 8, os alunos determinaram a probabilidade de um acontecimento recorrendo à AC no cálculo do número de casos possíveis. A resolução do problema apresentado na figura 9 envolveu a aplicação de mais do que uma operação combinatória.

Era um dia como outro qualquer. Mas, o impensável aconteceu. A professora teve que levar o carro ao mecânico e faltou à aula. Os alunos, para festejar, decidiram ir para o BC.

30 alunos chegaram ao BC, que tem 5 mesas, 20 cadeiras e um bilhar. 20 alunos vão-se sentar nas cadeiras e dos restantes, 2 ficarão a jogar a bilhar e os outros 8 ficarão em pé. De quantas maneiras diferentes pode ficar composto o BC?

Inicialmente, há 30 pessoas para colocar em 20 cadeiras (interessa a ordem pela qual as colocamos)

Depois de colocar as 20 pessoas, ficam 10 pessoas, das quais temos que escolher 2 para jogar bilhar

$$30_{A20} \times 10_{C2} \times 1$$

Pelo princípio fundamental da contagem, multiplica-se

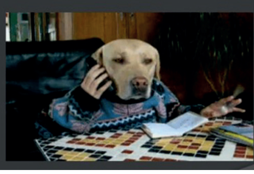
Ficam 8 pessoas para colocar em pé, ou seja, apenas 1 hipótese

Figura 9. Exemplo de um problema combinatório onde são utilizadas duas operações combinatórias

EM JEITO DE REMATE...

O desafio que foi colocado aos alunos deu-lhes uma oportunidade para revisitar e aprofundar conceitos anteriormente aprendidos, comunicando de modo espontâneo, mas também divertido, a forma como percecionam a AC nas suas vidas. De facto, as produções multimédia demonstram uma abordagem divertida e criativa à Matemática, em geral, e à AC, em particular. Os alunos foram capazes de formular problemas diversificados (mais ou menos complexos) e em contextos diversos, mas que lhes eram familiares. Conseguiram associar corretamente as várias operações combinatórias às situações criadas, demonstrando que são capazes de as distinguir. Mostraram também reconhecer

- **4)** A Maria esqueceu-se do número de telemóvel da mãe. Sabendo que o número começa por 91, e acaba em 23 e tem exatamente dois 5, um 0, um 8 e um 6, qual é a probabilidade de ela acertar no número?



Resolução:

Sabendo que o número da mãe da Maria começa por 91 e termina em 23, restam apenas 5 dígitos do número para completar com os restantes algarismos. Como o número de telemóvel possuía exatamente dois 5, dos cinco dígitos ainda disponíveis existem **5C2** maneiras diferentes de colocar os 5 no número de telemóvel. Os restantes 3 algarismos (8, 6 e 0), têm 3 lugares disponíveis no número e cada um deles pode permutar entre si, ou seja, **3!**.
Portanto, o número de casos possíveis é **5C2x3!= 60**.
Visto que a Maria quer acertar á primeira, o número de casos favoráveis é **1**.

Figura 8. Exemplo do cálculo da probabilidade de um acontecimento recorrendo à AC essas situações como presentes no seu dia a dia, percebendo as operações combinatórias como úteis para resolver problemas do quotidiano.

Ficou evidente nas produções dos alunos a sua intenção em comunicar de modo claro as resoluções dos problemas criados aos eventuais espectadores das produções multimédia elaboradas. De facto, os alunos preocuparam-se em explicar a utilização de cada operação combinatória em cada situação apresentada, dando-lhe significado no contexto escolhido, e até mesmo em explicar algumas operações aritméticas envolvidas, na procura de um sentido para o que estavam a comunicar.

É recompensador constatar que, apesar de terem passado alguns meses após a lecionação do tema da AC, os alunos mostraram valorizar a explicação das abordagens utilizadas na resolução dos diferentes problemas, através da utilização de esquemas e diagramas, tal como foram incentivados a fazer ao longo das aulas. Além disso, clarificaram sempre o porquê da utilização de um arranjo sem repetição ou de uma combinação, evidenciando que reconhecem a diferença entre as duas operações, assim como as situações associadas a cada uma delas.

Quando este desafio foi colocado aos alunos, não lhes foram impostas quaisquer regras, exceto que as suas produções deveriam conter situações onde seriam aplicadas as operações combinatórias e o princípio fundamental da contagem. A experiência foi positiva; porém, numa próxima oportunidade para repetir este desafio, pensamos ser importante definir um intervalo de tempo para a duração das produções dos alunos, pois houve bastante disparidade neste aspeto (as produções variaram entre os 2:37 e os 18:51 minutos). Quantidade não é qualidade, mas seria importante haver um pouco mais de uniformidade. Seria, talvez, uma mais valia sugerir a introdução de situações em que participassem não só os alunos, mas também familiares ou amigos, dado que este tipo de desafios se proporciona para divulgar, junto da comunidade escolar, aquilo que os alunos aprenderam nas aulas de Matemática, bem como para mostrar, a essa mesma comunidade, o papel e valor da Matemática na vida de todos os dias. Mais regras ou restrições poderiam, na nossa opinião, limitar a criatividade e diversidade dos trabalhos dos alunos.

Consideramos que esta experiência foi bastante enriquecedora, tanto para os alunos como para a professora. Aos alunos deu a oportunidade de comunicar o que tinham aprendido sobre um tema que tinham trabalhado nas aulas há algum tempo; à professora possibilitou-lhe conhecer melhor o modo como os alunos entendem e conceptualizam a AC. Além disso, foi interessante verificar que os alunos adquiriram não só a competência de resolver problemas de AC, mas também a de os construir de modo contextualizado e, muitas vezes, com um bom nível de complexidade, transferindo para a atividade de formulação de problemas as habilidades adquiridas na atividade de resolução de problemas, à qual se deu particular atenção durante as aulas de AC. Em suma, esta experiência com alunos do 12.º ano desafiou-os a comunicar ideias e aprendizagens, mas também os levou a alargar essas aprendizagens, pelo que, na nossa opinião, dá azo a que oportunidades de aprendizagem semelhantes devam ser proporcionadas, sem o (compreensível) receio de fazer *coisas diferentes*, de desafiar as capacidades dos alunos num ano de pressões externas e de muitas decisões.

Referências

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Eizenberg, M. M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 6*(1), 15-36.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 251-265.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A – 10.º ano*. Lisboa: ME-DES.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A – 12.º ano*. Lisboa: ME-DES.

Ministério da Educação (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: ME-DES.

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A*. Lisboa: ME-DES.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 12*(2), 29-53.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Shannon, A. (2007). Task context and assessment. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing Mathematical Proficiency* (pp. 177-192). New York, NY: Cambridge University Press.

Silva, R. S. R. (2015). The Pedagogic role of the arts and digital media in the practice of the Ontario Mathematics Curriculum. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29*(53), 1043-1065.

Belmira Mota

Colégio Efanor – Matosinhos, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Rosa Antónia Tomás Ferreira[1]

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto – CMUP

1 Este trabalho teve o apoio parcial do CMUP, através do projeto UID/MAT/00144/2013, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal), com fundos nacionais (MEC) e estruturais europeus (FEDER), ao abrigo do acordo de cooperação PT2020.