A escrita matemática e a intuição em Geometria

Maria Helena Martinho
Helena Rocha

Apesar da escrita ter, usualmente, uma forte expressão no ensino da Matemática, os alunos não estão habituados a explicitar raciocínios por escrito e a utilizar linguagem matemática apropriada. E apesar dos contextos de avaliação sumativa estarem muito dependentes da versão escrita, a competência de comunicação escrita poucas vezes é trabalhada de forma explícita. Contudo, a escrita matemática tem algumas particularidades importantes. Por exemplo, ajuda os alunos a dar sentido à Matemática e a melhorar o próprio discurso; além disso, as produções dos alunos disponibilizam informações ao professor, contribuindo para a planificação e concretização da sua prática profissional.

Este artigo apoia-se numa experiência realizada num contexto de resolução de problemas de Geometria, e no âmbito da formação de futuros educadores e professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, para caracterizar a escrita matemática dos alunos e identificar contributos desta para a compreensão, por parte do professor, dos seus conhecimentos. Em particular, foi possível identificar as intuições dos alunos em Geometria que suportam, ou por vezes deturpam a construção do conhecimento geométrico.

COMUNICAÇÃO ESCRITA

A produção de textos pelos alunos e a sua posterior discussão, constituem um meio importante no desenvolvimento da capacidade de comunicação (NCTM, 1994; Pimm, 1996). A escrita é um meio de comunicação, mas também de aprendizagem e descoberta (Sabrio, Sabrio, & Tintera, 1993). Ajuda a dar sentido à Matemática e a melhorar o próprio discurso. Enquanto escrevem os alunos estão ativos, a pensar e a aprender sobre matemática (Burns, 2008), desenvolvem o seu pensamento bem como o uso da linguagem matemática, como seja, o uso de termos, diagramas, gráficos, esquemas, analogias e símbolos (NCTM, 1994). Para construir um texto, os alunos precisam de examinar as suas ideias e refletir sobre o que já sabem, tomando consciência das suas dificuldades. Assim, os alunos escrevem para aprender e aprendem ao escrever matemática. Note-se, contudo, que a escrita matemática não abrange apenas a ação de escrever uma resposta a uma tarefa, trata-se de explicitar os raciocínios que levaram à resposta.

O processo de escrita requer uma maior atenção e reflexão, quando comparado com a expressão oral. Contudo, esta prática reflexiva requer uma intervenção explícita do professor, incentivando também a reflexão sobre o que foi escrito e promovendo o desenvolvimento progressivo das próprias compreensões (Pugalee, 2004). O processo de explicar ideias aos outros, com o objetivo de ser entendido, promove a evolução das próprias compreensões. A comunicação ajuda assim a formalizar as ideias (Pimm, 1996). Em geral, o ato de escrita, forçando a explicitação de conjeturas e conclusões, constitui uma oportunidade para clarificar, organizar e consolidar o pensamento do aluno, e desenvolver o conhecimento matemático, a capacidade de resolver problemas, o poder de abstração bem como a capacidade de raciocínio e a confiança em si próprio, alcançando uma compreensão mais profunda de conceitos e princípios matemáticos (NCTM, 1994).

Ao longo da escolaridade, os alunos revelam, habitualmente, dificuldades na escrita matemática. Segundo Carvalho (2011), em muitos casos deteta-se resistência à escrita matemática e necessidade de ajuda dos professores. O insucesso na explicitação de raciocínios não resulta da falta de conhecimento matemático, mas sobretudo da incapacidade de o verbalizar: dificuldades na conversão do pensamento em palavras, em saber como escrever, e na forma de apresentar a frase e encadear as ideias.

A escrita matemática é diferente da escrita noutras áreas de conhecimento, exigindo capacidades distintas que podem ser desenvolvidas nas aulas de matemática (Adu-Gyamfi, Bossé, & Faulconer, 2010). As diferentes representações matemáticas (como a numérica, simbólica, gráfica e verbal), requerem uma utilização frequente para que os alunos as dominem. A linguagem matemática formal e rigorosa não precisa de ser imposta, pode surgir com naturalidade e tornar-se comum pela necessidade do seu uso. Os alunos que escrevem matemática com alguma frequência vão naturalmente progredindo na sua formalização, reconhecendo nela uma maior universalização e mesmo facilidade para comunicar (NCTM, 1994). Os alunos podem começar por escrever recorrendo às suas próprias palavras, enquanto não se sentem familiarizados com os símbolos. Naturalmente, os símbolos vão deixando de constituir um obstáculo à compreensão do texto e começam a ser mais frequentes na própria escrita.

INTUIÇÃO EM GEOMETRIA

Alguns alunos tendem a tirar conclusões precipitadas com base na intuição, o que ocorre quando transportam para novas situações um contexto que, apesar de lhe ser alheio, lhes aparece como logicamente coerente. Em Geometria, as intuições têm um papel importante, contribuindo para o desenvolvimento do sentido espacial, contudo nem sempre conduzem a raciocínios corretos.

Stavy e Tirosh (2000) apresentam algumas classes de regras intuitivas, nomeadamente, "mais A – mais B" e "mesmo A – mesmo B". Vejamos alguns exemplos. Consideremos um retângulo e um outro retângulo idêntico mas a que foi retirado um pequeno quadrado junto a um dos vértices. Alguns alunos consideram que sendo a área da primeira figura maior também o perímetro o será, estão a recorrer à regra "mais A – mais B". Pensemos agora no comprimento de duas linhas diferentes que unem dois pontos à mesma distância, neste caso alguns alunos consideram que sendo a distância a mesma, o comprimento das linhas também o será, está a ser ativada a regra "mesmo A – mesmo B". Imaginemos dois cilindros construídos com uma folha de papel A4 ora na horizontal ora na vertical. Neste caso alguns alunos tendem a considerar que, se a folha (área da superfície lateral) é a mesma, então o volume dos cilindros também o será (regra "mesmo A – mesmo B").

UM PROBLEMA DE GEOMETRIA E ALGUMAS RESOLUÇÕES

O problema da figura 1 foi apresentado a alunos de uma turma da Licenciatura em Educação Básica.

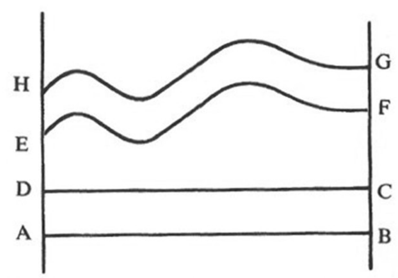
Analisamos de seguida as resoluções de dois grupos de alunos à luz de quatro critérios desenvolvidos com base em Santos e Semana (2014):

1. Compreensão do problema:
   – explicitação do que se pretende
   – implícita e identificável através da resposta apresentada
2. Apresentação das diferentes abordagens ensaiadas
   – explicitação das etapas realizadas durante a resolução do problema
   – fundamentação das opções assumidas (de acordo com o ponto seguinte) que levaram a considerar e a abandonar essa etapa
3. Fundamentação da resposta apresentada
   a. o nível de fundamentação apresentado
      – correção
      – clareza
      – completude da justificação
   b. o tipo de fundamentação apresentada
      – justificação vaga ou pouco clara
      – apresentação exclusiva de uma regra, procedimento ou definição
      – descrição de carácter procedimental (explicação do que é feito sem justificação da razão porque tal é válido)
      – recurso a uma abordagem empírica ou experimental para tentar verificar a veracidade
      – justificação de caráter relacional (explicitação da razão porque aquilo que é feito é válido)
3. Representações utilizadas
   – linguagem verbal (linguagem natural podendo integrar terminologia matemática)
   – representações icónicas (um esquema ou desenho)
   – representações simbólicas (símbolos algébricos)

Um dilema por resolver…

O Sr. António tem dois terrenos ([ABCD] e [EFGH]) cujas formas estão representadas na figura.

Uma vez que a época de cultivo da batata está a chegar, o Sr. António foi confrontado com um problema: Em qual dos terrenos conseguirá plantar o maior número de batatas possível?



Ajuda o Sr. António a resolver esta situação sabendo que ambos têm a mesma largura. Imagina agora que o Sr. António quer vedar os terrenos com rede. Para qual deles precisa de mais rede?

Figura 1. Enunciado do problema (adaptado de Fischbein, 1999)

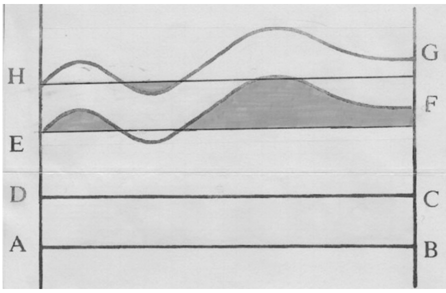


Figura 2. Representação icónica (grupo A)

Inicialmente, o nosso raciocínio foi traçar duas paralelas nas extremidades do terreno [EFGH], no entanto não chegamos a nenhuma conclusão. Não obstante, surgiu-nos a ideia de traçar duas paralelas, mas em sítios diferentes, uma com início em H e outra com início em E. Esta ideia surgiu pois ao observar o outro terreno [ABCD] reparamos que o terreno tinha início no ponto D e no ponto A que por sua vez era equivalente a H e E.

Depois de traçadas as paralelas, denotamos que aquilo que faltava dentro das paralelas que traçamos era o que estava em excesso fora destas. (Como mostramos acima no desenho).

Figura 3. Representação verbal (grupo A)

Grupo A

Estes alunos não apresentam explicitamente na sua resposta algo que indique terem compreendido o que lhes é pedido. Começam por dar a resposta ao problema, apresentando depois alguns elementos relativamente a uma abordagem anterior que não foi bem sucedida. Não fundamentam por que pensaram em traçar retas paralelas sobre a figura, mas já explicitam o que os levou a pensar em traçar retas a passar por pontos específicos e não coincidentes com os limites do terreno. As razões que apontam sugerem pois que adotaram uma abordagem de carácter experimental e que é nela que se apoiam para fundamentar a sua resposta. Socorrendo-se das representações icónicas (figura 2) e verbais (figura 3), articulam-nas para explicitar o que pensaram e por que pensaram.

Relativamente à segunda questão referem que foi a professora que os levou a reavaliar a resposta. Corrigem então a resposta inicial, segundo a qual os dois terrenos têm o mesmo perímetro, mas não fundamentam em que se basearam para chegar a uma conclusão, nem inicialmente nem posteriormente (figura 4).

A análise desta resolução evidencia assim alguma preocupação em explicitar raciocínios, procurando apresentar o percurso realizado e o que determinou as opções assumidas, e disponibilidade para refletir sobre o trabalho efetuado. É ainda interessante notar que a resposta errada surge precisamente na parte do problema em que não é explicitada justificação para as opções assumidas. Contudo, podemos estar perante o uso da regra intuitiva "mesmo A – mesmo B". Os alunos concluem que a área é a mesma e deduzem que o perímetro também é o mesmo.

Grupo B

À semelhança do que sucedeu no grupo A, também este grupo não apresenta explicitamente algo que indique ter compreendido o que é pedido, mas a resposta dada sugere que assim sucedeu. Começam por referir duas opiniões contrárias entre os membros do grupo: áreas iguais e áreas diferentes. Na figura 5 é possível encontrar uma tentativa de explicitação dessas opiniões.

A primeira opinião apresentada revela que estão a associar intuitivamente os comprimentos. Sendo a linha curva HG maior do que o segmento DC, então as respetivas áreas são também diferentes. Ao imaginarem que podem "esticar" o terreno,

Após uma interrogação da docente, questionamos-nos à cerca da nossa anterior conclusão sobre o perímetro de ambos os terrenos [ABCD] e [EFGH]. Deste modo analisamos que o terreno [EFGH] gasta um maior número de rede, logo o perímetro é maior do que [ABCD], pois a sua forma é irregular/embicada.

Figura 4. Correção à resposta inicial à pergunta 2 (grupo A)

Inicialmente o nosso grupo dividiu-se segundo duas opiniões, sendo a primeira que o terreno [EFGH] teria maior área do que o terreno [ABCD], pois se imaginasse o terreno de uma forma esticada seria maior que o outro. Contrariamente, a segunda ideia baseava-se em que os dois terrenos teriam a mesma área, pois sobrepondo os dois terrenos teriam exatamente a mesma área.

Figura 5. Opiniões divergentes (grupo B)

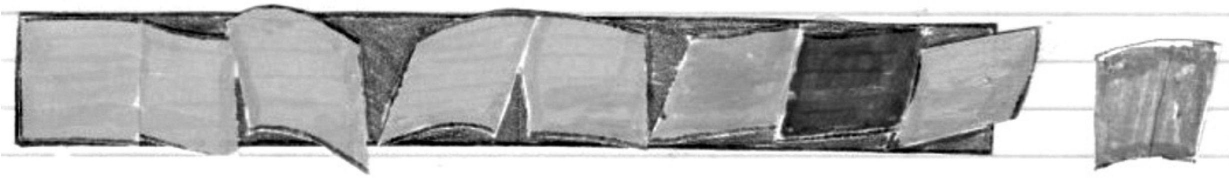


Figura 6. Representação icónica da primeira tentativa (grupo B)

estão a supor que ele tem apenas uma dimensão, aplicando a regra intuitiva "mais A – mais B" e assumindo que a um maior comprimento corresponde uma maior área.

Estes alunos, contrariamente aos do grupo A, procuram apresentar o processo de resolução, apresentando três tentativas diferentes de abordagem e descrevendo explicitamente a divisão existente no grupo quanto à resposta. Na primeira tentativa, optam por uma fundamentação de carácter experimental, recortando e sobrepondo o primeiro terreno sobre o terreno retangular, para comparar as áreas. Apesar da forma descuidada como ilustram esta tentativa (figura 6), os alunos concluem que, uma vez que sobra um pedaço, a área desse terreno será maior.

Não justificam por que descartaram esta resposta e passam a apresentar uma nova tentativa. Neste caso recorrem a um elástico para medir o que designam por contorno dos terrenos, concluindo que o do terreno retangular é menor (figura 7). É a intervenção da professora que, segundo afirmam, os leva a abandonar esta tentativa e passar à terceira.

Por sugestão da professora traçam duas retas paralelas sobre a representação do primeiro terreno e concluem que as áreas são iguais. Fundamentam a sua conclusão dizendo que o terreno "ficou dividido em duas partes iguais", uma afirmação vaga, que não é fácil de perceber e que deixa dúvidas quanto à compreensão dos alunos relativamente à resposta que apresentam (figura 8).

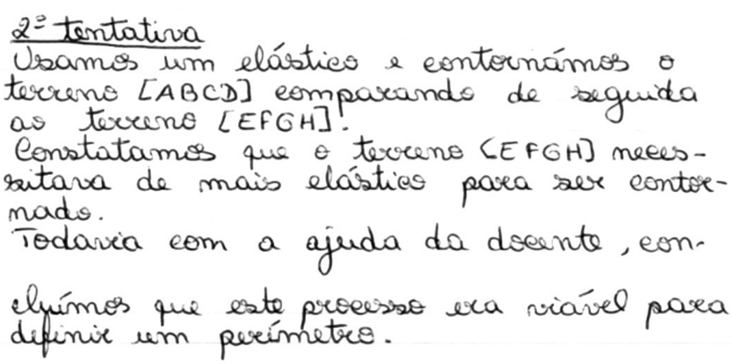
Relativamente à questão 2 não dão nenhuma resposta explícita, parecendo que a referência ao perímetro na segunda tentativa é encarada pelos alunos como suficiente para responder. A análise da resposta dos alunos evidencia a intenção de dar a conhecer todo o processo vivido pelo grupo, sendo marcantes as dificuldades sentidas e o impacto da intuição sobre uma das abordagens seguidas. Apesar dessa intenção, os alunos não apresentam efetivamente justificações para as decisões tomadas, nem para as respostas apresentadas. Toda a fundamentação apresentada é de carácter experimental, algo que é transversal a todas as abordagens que efetuam.

CONCLUSÃO

A análise da escrita matemática desenvolvida por estes alunos permite identificar algumas das suas características. Um dos aspetos, comum a todos os alunos (e não apenas aos grupos cujas resoluções aqui apresentamos), prende-se com a explicitação na sua escrita do objetivo da questão colocada, algo que não fazem; no entanto, nos diferentes casos, foi possível inferir através da resposta dada que compreenderam o problema.

Habitualmente, os alunos não apresentam o processo de resolução seguido: preocupam-se, essencialmente, em dar a resposta ao problema. Mesmo os alunos que apresentam algo relativamente ao percurso por que passaram, tendem a fazê-lo no final da sua resolução.

A qualidade da fundamentação das respostas é variável em termos de correção, clareza ou completude. A intuição assume um papel importante e parece impedir o desenvolvimento de respostas fundamentadas e, por vezes, leva mesmo a respostas incorretas. Tendencialmente, uma maior fundamentação da resposta corresponde a respostas corretas. Paralelamente, a fundamentação das respostas parece consistir num ponto de



2ª tentativa
Usamos um elástico e contornámos o terreno [ABCD] comparando de seguida ao terreno [EFGH].
Constatamos que o terreno [EFGH] necessitava de mais elásticos para ser contornado.
Todavia com a ajuda da docente, concluímos que este processo era viável para definir um perímetro.

Figura 7. Segunda tentativa de resolução (grupo B)

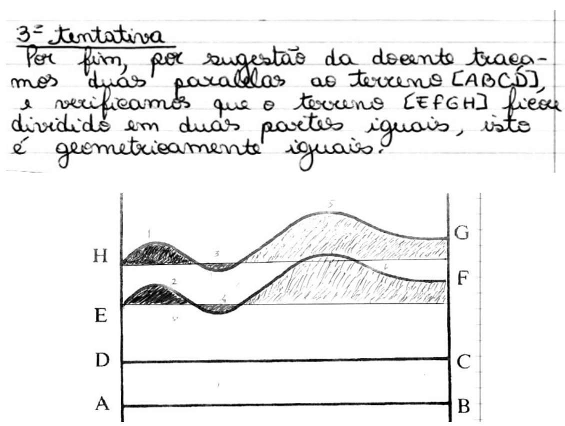


Figura 8. Terceira tentativa de resolução (grupo B)

partida para a reflexão dos alunos. A fundamentação apresentada pode ser determinante para a compreensão pelo professor do conhecimento do aluno; no entanto, muitas vezes é vaga ou de carácter empírico ou experimental, fornecendo pouca informação ao professor.

O recurso à escrita matemática permitiu ao professor aceder à forma de pensar dos alunos tal como refere Pugalee (2004). Foi assim possível identificar alguns raciocínios intuitivos, nomeadamente o recurso à regra "maior A – maior B" (quando os alunos assumem que um maior comprimento se traduz numa maior área) e à regra "mesmo A – mesmo B" (quando concluem que a superfícies de igual área corresponde igual perímetro). Torna-se deste modo possível ao professor atuar de forma diferenciada e planificar a sua prática de forma mais adequada à realidade em que se encontra.

Dada a importância que a escrita matemática assume na construção do universo matemático dos alunos, revela-se fundamental cuidar do seu desenvolvimento, em qualquer nível de escolaridade, para que eles sejam capazes de aperfeiçoar o seu discurso oral e escrito, tornando-o progressivamente mais claro e completo.

Referências

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Faulconer, J. (2010). Assessing understanding through reading and writing in mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *11*(5), 1-22.

Burns, M. (2008). *Writing in math class: A resource for grades 2-8*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Carvalho, J. A. B. (2011). Escrever para aprender: Contributo para a caraterização do contexto português. *Interacções*, *19*, 219-237.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. In D. Tirosh (Ed.), *Forms of mathematical knowledge: Learning and teaching with understanding*, (pp. 11-50). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM-IIE.

Pimm, D. (1996). Diverse communications. In P. Elliott & M. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics K-12 and beyond*. *Yearbook* (pp. 11-19). Reston, VA: NCTM.

Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written description of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 27-47.

Sabrio, D., Sabrio, S., & Tintera, G. (1993). Writing to learn and learning to write mathematics: An experimente. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *3*(4), 419-429.

Santos, L., & Semana, S. (2014). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment practices. *Educational Studies in Mathematics*, *88*, 65-87.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics*. New York: Teachers College Press.

Maria Helena Martinho

CIED, Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho

Helena Rocha

UIED, Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade Nova de Lisboa