A importância das discussões coletivas para o desenvolvimento do pensamento algébrico

Célia Mestre

Um ambiente de sala de aula onde os alunos tenham oportunidade de apresentar e defender as suas ideias, reagir e comentar as contribuições dos colegas e procurar chegar a consensos sobre o significado de ideias matemáticas importantes contribuirá, certamente, para a aprendizagem matemática dos alunos e da sua cidadania. Para constituir e manter uma comunidade com estas características, o professor deve fazer emergir as ideias dos alunos e também criar as condições necessárias para que este tipo de interações ocorra (Boavida, 2005). Se os tipos de comunicação nos quais os alunos se envolvem podem ser limitados pela sua compreensão matemática, de forma recíproca, a compreensão matemática também pode tornar-se mais sofisticada à medida que evolui a capacidade de comunicação. Neste sentido, Cobb et al. (1997) focam-se na relação entre o discurso de sala de aula e o desenvolvimento matemático dos alunos que nele participam, denominando como *discurso reflexivo* aquele em que "a atividade matemática é objetivada e se torna um tópico explícito de conversação" (p. 269), considerando que, nessas condições, os alunos podem realizar aprendizagens matemáticas.

Em salas de aula onde existe esta prática de ensino, os professores falam menos e os alunos mais do que o que seria esperado numa sala de aula num contexto de ensino mais tradicional, pois os professores organizam o tempo da aula de forma a que aos alunos sejam dadas mais oportunidades de comunicação, tanto em pequeno grupo como durante a discussão coletiva com toda a turma (Baxter & Williams, 2010).

Considerando a importância da comunicação para a aprendizagem matemática, este artigo foca-se em momentos da discussão coletiva de uma tarefa em aula. A tarefa que se apresenta insere-se num estudo mais amplo de implementação de uma experiência de ensino (Mestre, 2014), desenvolvida ao longo de um ano letivo. O principal objetivo da experiência de ensino era desenvolver o pensamento algébrico dos alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade, centrando-se na capacidade de generalização e sua representação.

A definição de pensamento algébrico assumida na experiência de ensino é apresentada por Blanton e Kaput (2005) como o "processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (p. 413). Assumindo o carácter central da generalização, ela é entendida como um processo dinâmico, socialmente situado, que se desenvolve através de ações colaborativas (Ellis, 2011). De acordo com esta autora, a generalização é uma atividade desenvolvida pelas pessoas dentro de um contexto sociomatemático específico, surgindo como uma representação coletiva que tem raiz na comunidade, através de experiências mediadas pela interação, linguagem e outras ferramentas próprias. Acrescenta ainda que a ação de generalização decorre em ciclos de interação onde uma generalização inicial pode revestir-se de novas formas, passando pela interação e reflexão coletivas, sendo a versão de generalização final não o produto de um só aluno, mas resultante do desenvolvimento ocorrido na interação do grupo.

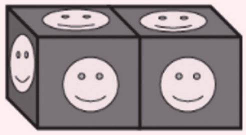
Por outro lado, na experiência de ensino também se considerou que a generalização pode ser expressa de diversas formas, desde a linguagem natural a formas gradualmente mais simbólicas (Blanton, 2008). Neste sentido, os alunos desenvolveram simultaneamente o seu sentido de símbolo, progredindo gradual e naturalmente desde a utilização de símbolos próprios para expressar a generalidade à introdução com sentido da notação algébrica.

Na experiência de ensino foram desenvolvidas quarenta e duas tarefas, organizadas numa lógica de integração curricular com os temas e conteúdos do currículo do 4.º ano de escolaridade. A tarefa que se apresenta a seguir − *Cubos com autocolantes* (figura 1) − foi a penúltima tarefa explorada na experiência de ensino e realizou-se no final do ano letivo. Tinha como objetivo a exploração de relações funcionais, tendo como contexto uma sequência pictórica crescente e pretendia-se que os alunos indicassem termos próximos e mais distantes da sequência e identificassem uma regra geral. Nesta fase da experiência de ensino os alunos já revelavam bastantes facilidades na apreensão e expressão da generalização em linguagem natural e linguagem simbólica, atribuindo significado aos símbolos que usavam.

Tarefa " Cubos com autocolantes"

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1.1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa nas construções seguintes e explica como pensaste.

Três cubos.
Quatro cubos.
Dez cubos.
Cinquenta e dois cubos

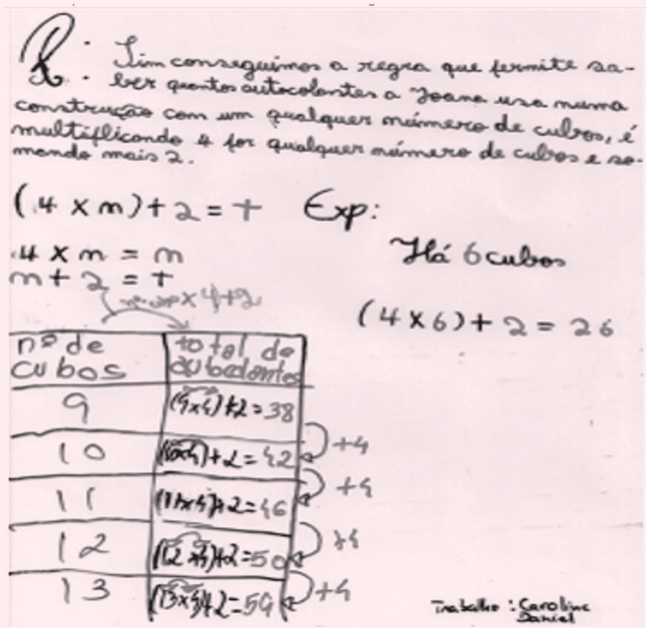
1.2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 1. Tarefa *Cubos com autocolantes*

A tarefa foi apresentada a partir da leitura do enunciado e da modelação da situação, reconstruindo-se com os alunos a primeira construção da sequência, usando cubos e colando os autocolantes nas faces respetivas. Em seguida, os alunos trabalharam autonomamente, em pares ou trios, e tinham à sua disposição construções com dois e três cubos, com os autocolantes colados. Após o momento de trabalho autónomo, seguiu-se a discussão coletiva, com a apresentação e discussão das resoluções de diferentes pares ou trios. Neste artigo apresentam-se dois momentos da discussão coletiva que evidenciam diferentes aspetos da exploração da relação funcional. Os diálogos que constituíram esses momentos da discussão coletiva já tinham sido apresentados anteriormente num artigo desta publicação (Mestre, 2015), focado no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. No entanto, aqui a análise foca-se na forma como os momentos de discussão coletiva promoveram o desenvolvimento da capacidade de comunicação dos alunos e, vice-versa; ou seja, como a capacidade de comunicação dos alunos permitiu momentos de discussão coletiva poderosos e promotores de aprendizagens matemáticas.

O primeiro momento que se apresenta diz respeito à apresentação do par Carolina e Daniel (figura 2). Na sua resolução é interessante verificar que apresentam a escrita simbólica da regra utilizando cores para atribuir diferentes significados ao mesmo símbolo. Inicialmente, estes alunos escrevem corretamente a regra $(4 \times n) + 2 = t$. Depois, apresentam o que parecem ser os procedimentos anteriores que conduzem à escrita dessa regra, revelando incorreções formais. No entanto, utilizam duas cores (vermelho e azul), às quais parecem atribuir uma significação particular. Inicialmente escrevem $4 \times n = n$, representando o primeiro n a azul e o segundo a vermelho, indicando, assim, tratar-se de números diferentes. Depois, escrevem $n+2=t$, escrevendo esse n a vermelho, ou seja, sendo este número equivalente à soma da operação anterior. Desta forma, o modo como utilizam diferentes cores para os *n´s* permite perceber que querem representar números diferentes. Naturalmente que o procedimento que apresentam não é correto, mas é interessante verificar como atribuem à cor esta significação simbólica.

O par apresenta ainda uma tabela com duas colunas, onde relacionam o número de cubos com o número de autocolantes e apresentam diversos exemplos. Usando setas, o par explicita as relações encontradas, tanto recursivamente, ao fazer uma leitura linha a linha, como de modo funcional, ao estabelecer a relação direta entre o número de cubos e o número de autocolantes: "n.º de cubos × 4+2". É interessante verificar que é pela leitura funcional que os alunos determinam o número de autocolantes para cada um dos exemplos apresentados.



Sim, conseguimos a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos, é multiplicando 4 por qualquer número de cubos e somando mais 2.

Figura 2. Resolução do par Carolina e Daniel

Quando o par apresenta a tabela à turma, começa por focar-se na leitura de cada coluna, identificando as relações encontradas entre os termos consecutivos da sequência. Quando refere que, na coluna do número de autocolantes, a relação é "de quatro" e depois que "está sempre a fazer dois", isso suscita interpelações por parte de alguns colegas. Assim, em conjunto, estes alunos clarificam o significado da multiplicação por quatro e da adição do valor constante que acontece entre os termos consecutivos da sequência.

Carolina – Nós pensámos (…) E vimos a relação. Então fizemos duas colunas: uma com o número de cubos e outra com o total de autocolantes. O número de cubos é 9,10,11,12,13 e a relação é de um. No total de autocolantes a relação é de quatro. Aqui era de quatro, mas aqui estava sempre a fazer dois, também era de quatro.

Fábio – Essa parte não percebi... era de dois e depois era de quatro?

Carolina – Sim, aqui era de quatro e aqui está sempre a ser dois...

Gonçalo – Não, simplesmente porque ali é vezes quatro...

Carolina – Sim, porque aqui está sempre dois, por isso é de quatro... se fizeres assim, sem o dois, assim 9 vezes 4 é 36, e depois 10 vezes 4 dá 40, 42...

Gonçalo – Não, mas isso é só a tabuada do 4. 9 vezes 4 era 36...

Rita – Vezes 4 é 36, juntando mais 2, como em todos junta mais 2, por isso é que dá mais 4.

Gonçalo – Se tirares o mais 2 é a tabuada do 4.

Tendo em conta a importância da tarefa para a compreensão com significado das regularidades encontradas, a professora procura que os alunos justifiquem essas regularidades usando o contexto concreto da tarefa. Desta forma, conduz a discussão coletiva no sentido de os alunos identificarem explicitamente o significado concreto das relações matemáticas encontradas. Procura assim, insistentemente, que os alunos se liguem ao contexto da tarefa para traduzir as ideias matemáticas em exploração. Embora pareça evidente que os alunos que estão envolvidos na discussão já tenham compreendido essas ideias, esta insistência da professora permite que todos os alunos acompanhem a discussão, especialmente aqueles que ainda possam estar com dificuldades em compreender o modo mais abstrato de como as ideias estão a ser discutidas.

P – Porque é que é sempre mais 4?

Fábio – Porque se faz sempre vezes 4...

P – Mas porquê?

Carolina – Porque 9 vezes 4 dá 36, depois com o 2, 38; 10 vezes 4, 40, junta-se o 2, 42, é o 2 que está a fazer isto...

(…)

P – Mas porquê?

Rita – Porque foi assim, eles fizeram 9 vezes 4, é 36 e o 36 faz parte da tabuada do 4, mas eles puseram mais 2, se eles no próximo metessem mais 3 já não seria mais 4... porque é sempre o mesmo número.

P – Mas eles fizeram e fizeram corretamente... A minha pergunta é porque é que neste problema, nesta situação….

Rita – Porque há 4 lados nos cubos.

(...)

João V. – Porque tem 4 lados.

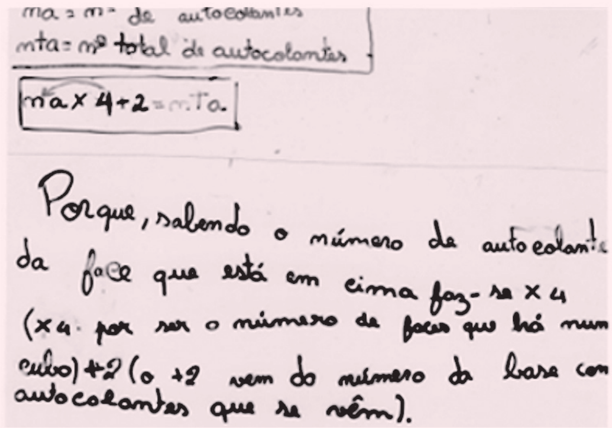
João V. – Sim, 4 faces.

P – Mas o cubo tem 4 faces?

Vários alunos – Não, tem 6...

João V. – Mas é menos uma que fica tapada e depois é menos a outra do outro lado que também fica tapada.

O segundo momento acontece com a apresentação dos alunos Rita, Diogo e Beatriz (figura 3). Este grupo apresenta a escrita da regra em linguagem simbólica alfanumérica e em linguagem natural. Apresenta uma legenda onde discrimina o significado atribuído a cada variável na escrita simbólica da regra. Na representação em linguagem natural descreve o procedimento que efetua para calcular o número de autocolantes de uma qualquer construção de cubos, considerando o número de autocolantes da "face que está em cima".



Porque sabendo o número de autocolantes da face que está em cima faz-se ×4 (×4 por ser o número de faces que há num cubo)+2 (o +2 vem do número da base com autocolantes que se veem).

Figura 3. Resolução do grupo Rita, Diogo e Beatriz

Na sua explicação à turma, este grupo mostra que considerou "o número de autocolantes da face que está em cima" como variável independente. Como os restantes grupos tinham considerado, até ao momento, o número de cubos como variável independente, o facto deste grupo considerar o número de autocolantes como essa variável suscitou discussão na turma, com alguns alunos a pronunciarem-se contra essa opção.

João V. – Número de autocolantes vezes 4... número de autocolantes?! Assim já sabem o número de autocolantes. Tem de ser o número de cubos, é o número de cubos!

Rita – Mas não é o número de autocolantes, é o número que está em cima.

Gonçalo – Então, só há um.

Rita – Não, pode haver 2 cubos. Seria 2 vezes 4.

João V. – É muito complicado porque o *na* era o número de autocolantes… isso quer dizer que já sabes o número de autocolantes…

Gonçalo – É a mesma coisa saber o número de autocolantes e fazer vezes 4.

João V. – Mas assim já têm de saber o número de autocolantes.

Rita – Não, não sabemos nada. Por exemplo, temos este cubo, por exemplo, temos um autocolante em cima e faço vezes 4, mas eu não sei o número total de autocolantes e depois é mais 2.

Carolina – Mas porque não pões o número de cubos? É mais fácil.

Perante a reação da turma, a professora propõe, então, que se comparem duas representações diferentes, uma resolução apresentada em momento anterior na discussão por outro grupo e a do grupo que agora apresentava (figura 4).

Embora a escrita da regra seja semelhante em ambos os grupos, o primeiro considera o número de cubos como a variável independente e o segundo considera ser o número de autocolantes essa variável.

Gonçalo – No nosso está a dizer que é um número qualquer de cubos e o dela é um número qualquer de autocolantes… Mas vai dar ao mesmo… Saber o número qualquer de autocolantes ou o número qualquer de cubos é a mesma coisa…

P – É?

Gonçalo – Então é assim: aqui há 3 cubos e os *smiles* de cima… então estes são os *smiles* de cima e são 3 cubos e 3 *smiles*. Tínhamos falado que os *smiles* é 3 vezes 4, viste os *smiles* de cima, mas se souberes os 3 cubos também vai ser 3 vezes 4.

P – Mas o número de autocolantes dessa construção é igual ao número de cubos?

Gonçalo – Não, professora, mas só que a Rita estava a dizer que só contava os de cima, que era os de cima vezes 4, então os de cima são 3 e há 3 cubos, então os 3 autocolantes de cima é a mesma coisa que os 3 cubos.

(…)

João V. – É a mesma coisa.

P – É a mesma coisa… mas…

João V. – Só que explicado de maneiras diferentes…

P – É a mesma coisa, mas acho que temos de ter um cuidadinho aí…

(…)

P – Agora eu acho que… há um cuidado quando nós usamos ali um número qualquer de autocolantes, acho que temos de ter um cuidado especial ali…

Gonçalo – Ali ela falou que era o de cima, mas se for o da frente também são 3 autocolantes e 3 cubos.

João V. – Tanto faz.

P – Ok, e se for o número total de autocolantes?… Não é também o número de autocolantes?

Vários alunos – É.

P – Então, o que falta dizer ali? Número de autocolantes…

João V. – E cubos.

Fábio – Não, número de autocolantes de cima.

P – De cima, de uma face.

Os dois momentos apresentados mostram como foram objeto da discussão da turma diferentes e importantes aspetos relativos ao pensamento algébrico, mais especificamente no que respeita à compreensão e representação de relações funcionais e da construção do sentido de símbolo. O ambiente de sala aula descrito pode ser caracterizado como aquilo que Boavida (2005) denomina *cultura de argumentação* e que descreve do seguinte modo:

> A apresentação, por parte dos alunos, de argumentos em defesa das suas ideias, a análise crítica das contribuições dos colegas, a discussão da legitimidade matemática de cadeias de raciocínio, a expressão

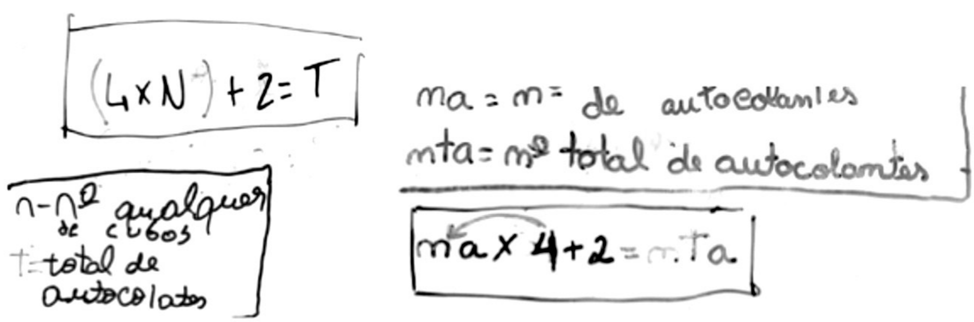


Figura 4. Comparação entre as resoluções dos grupos

> de desacordos e sua resolução, a fundamentação de posições com argumentos de caráter matemático, a avaliação de se é, ou não, apropriado usar um determinado raciocínio na resolução de um problema, a formulação de conjeturas e a avaliação da plausibilidade e/ou validade destas conjeturas. (p. 22)

De facto, nesta altura da experiência de ensino, os alunos já se encontravam imersos nessa cultura na sala de aula onde as discussões coletivas se assumiam como produtivas para a construção do conhecimento matemático. Neste sentido, é importante realçar dois aspetos que permitiram a construção de uma cultura de sala de aula direcionada para a aprendizagem matemática. Por um lado, a qualidade e adequação das tarefas e, por outro, o papel do professor na condução dessa cultura de sala de aula. No primeiro aspeto, é importante salientar que a tarefa matemática apresentada se revelou valiosa e adequada, constituindo uma oportunidade rica de aprendizagem para a exploração das relações funcionais. Apresentando um desafio adequado à generalidade dos alunos, a tarefa mobilizou as aprendizagens já construídas e permitiu, ainda, progredir no percurso de desenvolvimento do pensamento algébrico. Relativamente ao segundo aspeto, a orquestração da discussão coletiva por parte da professora permitiu que os alunos fossem os maiores protagonistas desse momento, conduzindo-os a ações como a explicação, clarificação e justificação de ideias matemáticas, confronto e comparação entre diferentes estratégias e representações; levando-os intencionalmente à exploração de aspetos fundamentais para a compreensão das relações funcionais e da construção do sentido de símbolo. Desta forma, o questionamento da professora, podendo parecer pouco dirigido ou saliente, revela uma clara intencionalidade de conduzir os alunos na exploração desses aspetos, conduzindo-os à negociação de significados e à construção do conhecimento matemático na turma, assumida aqui como uma verdadeira comunidade de aprendizagem.

Referências

Baxter, J. A., & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education*, *13*, 7-26.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking, Transforming Practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: olhares sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.) *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13-43). Setúbal: IPS.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258-277.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing – Promoting actions: how classroom collaborations can sup-port students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308-345.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino* (tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Mestre, C. (2015). O desenvolvimento do pensamento algébrico num contexto de ensino exploratório: um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade. *Educação e Matemática, 134*, 12-16.

Célia Mestre

Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada