

# A tecnologia entre uma tarefa de geometria analítica e a *Vesica Piscis*

Num período em que a discussão sobre as questões de gestão e desenvolvimento do currículo se reavivou, nomeadamente com o projeto da autonomia e flexibilização curricular, parece ganhar redobrada pertinência uma abordagem transformadora e estruturadora do ensino e aprendizagem da matemática – também ela contendo uma dimensão de desenvolvimento do currículo – a resolução de problemas suportada pelo recurso às tecnologias digitais.

Santos-Trigo, Reyes-Martínez e Aguilar-Magalón (2015) estão entre os autores que defendem exatamente essa ideia. As variadas ferramentas digitais que estão à nossa disposição têm diferentes potencialidades, intencionalidades e capacidades. Mas as suas potenciais vantagens estão sempre diretamente relacionadas com a qualidade das tarefas e dos processos de raciocínio que os alunos poderão experimentar ao trabalhar com uma dada ferramenta (sejam tecnologias de múltiplas finalidades, sejam tecnologias mais especificamente destinadas a atividade matemática). Santos-Trigo é um investigador mexicano interessado no papel transformador da tecnologia que nos impele a questionar formas tradicionais e padronizadas de tratar e sequenciar os conteúdos e os conceitos matemáticos e a hierarquização de conhecimentos, tantas vezes aceites como dados adquiridos e incontestáveis. Os seus trabalhos ilustram frequentemente formas de abordar situações matemáticas com recurso a tecnologias dinâmicas que as tornam em situações *poderosas* porque, num ápice, suscitam e promovem desdobramentos, incursões por tópicos inesperados, ligações entre conceitos e tópicos ou a investigação de relações matemáticas.

É neste sentido que a ideia de *problematização* no ensino e aprendizagem da matemática – em que as questões e situações matemáticas ganham fôlego e profundidade no âmbito de uma abordagem questionadora com recurso a tecnologias – está nitidamente ligada à flexibilização do currículo. Por isso, fica a advertência: “uma barreira a uma abordagem de resolução de problemas com tecnologias é o facto de se trabalhar e acompanhar um currículo muito estruturado geralmente composto de sequências de unidades e conteúdos” (Santos-Trigo, Reyes-Martínez e Aguilar-Magalón, 2015, p. 300).

No que se segue, trazemos uma breve visão desta perspetiva transformadora, propulsionada pela integração coordenada de ferramentas digitais no âmbito de uma tarefa de geometria analítica no plano. Discutimos vários aspetos da tarefa, tirando partido de potencialidades do GeoGebra, e depois infletimos em direção a outras questões de geometria com conexões a outras áreas do conhecimento.

## GEOMETRIA ANALÍTICA: EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA, INTERSEÇÕES E ÁREAS

A tarefa proposta tem aspetos que lhe conferem alguma riqueza, no sentido em que não pressupõe apenas um trabalho rotineiro de reprodução de métodos ou conhecimentos tratados previamente. O mais importante, contudo, é vê-la como uma tarefa *dinâmica e poderosa* quando se incorpora o uso coordenado de tecnologias. Esta tarefa envolve várias questões relacionadas com duas circunferências cujos centros e raios são dependentes de um parâmetro  $a$ .

Considere os pontos  $A=(a,0)$  e  $B=(0,0)$ , sendo  $a>0$ . Sejam as circunferências com centro em cada um desses pontos e raio  $a$ .

1. Prove que cada uma das circunferências passa pelo centro da outra.
2. Determine as coordenadas dos pontos de interseção das circunferências, P e Q, à custa de  $a$ .
3. Determine a relação entre o comprimento de PQ e o comprimento de AB.
4. Considere a região de sobreposição dos dois círculos (uma lente). Determine a sua área.
5. Como varia a área dessa região em função de  $a$ ?

Naturalmente, todas as questões colocadas podem ser resolvidas analiticamente, usando conhecimentos essenciais de geometria analítica e noções de trigonometria.

A nossa abordagem vai, porém, no sentido de tirar partido do GeoGebra e das suas possibilidades, quer no domínio da geometria, quer do cálculo algébrico (CAS), quer ainda da representação de funções.

Na janela gráfica, começamos por criar um parâmetro  $a$ , associado a um seletor, em que definimos a variação de  $a$  entre 0 e 10, por exemplo. De seguida, mantendo os eixos coordenados visíveis, marcamos os pontos A e B. Por fim, usando a ferramenta que permite construir uma circunferência com centro num ponto e raio dado, construímos as duas circunferências referidas. O resultado na janela gráfica, colocando o seletor no valor 5, corresponde ao que se vê na figura 1:

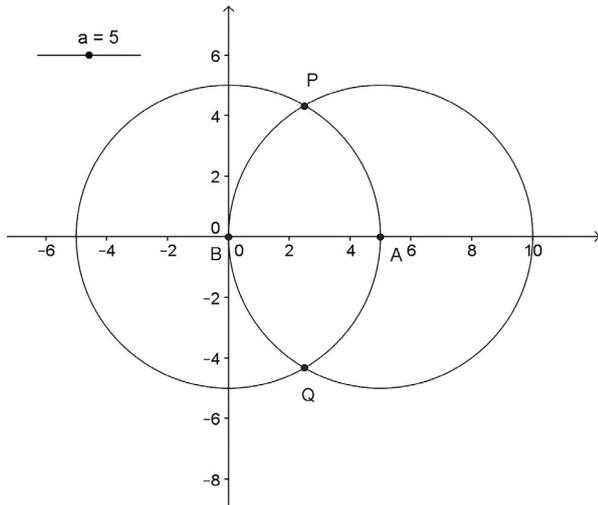


Figura 1. A construção das duas circunferências ligadas a um seletor que permite variar o parâmetro  $a$

Naturalmente, esta construção é dinâmica, sendo condicionada pelo valor do parâmetro  $a$ , que, ao ser alterado, desloca o centro A e altera o raio das circunferências.

Relativamente à primeira questão proposta, é claro, ao fim de algumas observações, que cada uma das circunferências passa pelo centro da outra. Visualmente, esta conclusão é imediata. Mas também é possível justificar este facto, percebendo que a distância entre os centros das duas circunferências é igual a  $a$ , ou seja, ao valor do raio. Isso equivale a afirmar que qualquer das circunferências passa pelo centro da outra. Ainda outra forma de justificar a mesma observação seria mostrar que a equação de cada circunferência é verificada pelas coordenadas do centro da outra. Esta poderá ser a forma menos espontânea de pensar e, para muitos alunos, provavelmente a mais complexa. Sabe-se que a ideia de um ponto *pertencer a uma curva* como sinónimo de *verificação da sua equação* não é fácil de assimilar, para muitos alunos. A utilização das ferramentas de CAS pode eventualmente dar uma ajuda para tornar essa ideia mais clara. Na janela algébrica, as duas circunferências, automaticamente designadas por c e d, ficam representadas pelas suas equações. Na janela de CAS, podemos ver o resultado da ação de substituir as coordenadas do centro de uma circunferência na equação da outra, usando o comando *Substitute*. O resultado é apresentado a seguir (figura 2). Em cada linha, relativa a cada uma das

substituições, surge uma igualdade verdadeira.

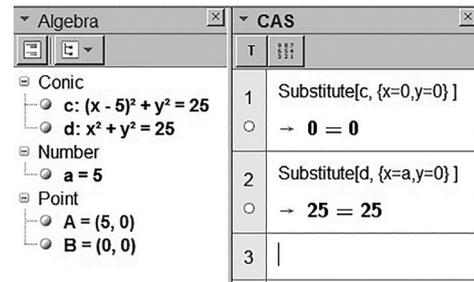


Figura 2. A utilização de ferramentas de CAS para verificar o efeito da substituição das coordenadas de um ponto na equação de uma circunferência

Passando à questão seguinte, vamos tratar da obtenção das coordenadas dos dois pontos de interseção das circunferências, que se designam por P e Q. Na janela gráfica, podemos construir os pontos de interseção das duas curvas, usando a ferramenta que determina a interseção entre dois objetos. Na janela algébrica, surgem as coordenadas desses pontos (para o caso de  $a=5$ ), expressas em números decimais:  $P=(2.5, 4.33)$  e  $Q=(2.5, -4.33)$ . Não é fácil estipular uma relação entre estes valores e o valor do parâmetro  $a$ . Podemos fazer experiências, recorrendo à alteração do parâmetro  $a$  e observar o efeito nas coordenadas dos dois pontos, como se ilustra na figura 3:

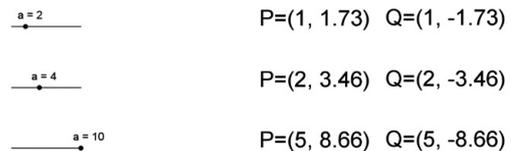


Figura 3. Variação do parâmetro  $a$  e as correspondentes coordenadas de P e Q

Parece bastante óbvio que a abcissa dos dois pontos corresponde a  $\frac{a}{2}$ . Contudo, não é tão evidente a forma como se obtém o valor da ordenada à custa de  $a$ .

Passemos, novamente, à janela de CAS. Iremos usar a função *CSolve* que permite obter as soluções de um conjunto de equações simultâneas com uma ou mais incógnitas (figura 4):

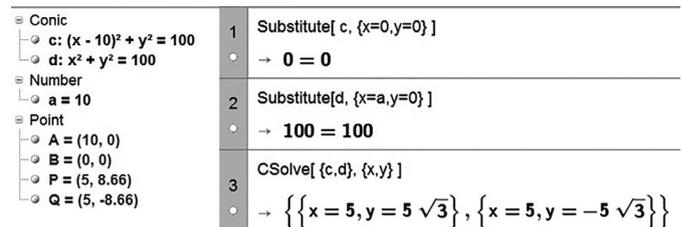


Figura 4. Os valores exatos das coordenadas dos pontos de interseção, com recurso ao CAS

De novo, se alterarmos a posição do cursor para variar o parâmetro  $a$ , encontraremos o mesmo tipo de expressão

numérica para as ordenadas dos pontos P e Q, podendo portanto admitir-se que se tem  $P = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$  e  $Q = \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ . Com esta informação, já é fácil encontrar a relação entre a medida do segmento PQ e do segmento AB:  $\overline{PQ} = \sqrt{3}a$  e  $\overline{AB} = a$ , logo  $\overline{PQ} = \sqrt{3} \overline{AB}$ .

Avancemos agora para a questão da área da região em que os dois círculos se sobrepõem. Chama-se a esta figura geométrica uma *lente*. No caso que estamos a considerar, trata-se de uma lente especial, pois os dois círculos têm raios iguais e a distância entre os centros é igual ao raio. Veremos adiante que esta lente tem tido uma grande influência na arte, ao longo de muitos séculos.

Para o cálculo da área da região pretendida, as ferramentas gráficas do GeoGebra poderão dar algum apoio, ainda que não de forma direta pois, para a construção de porções de círculos, apenas encontramos ferramentas para construir setores circulares e setores circuncirculares. Faremos a construção em dois passos, para obter um segmento de círculo: construiremos um setor circular e retiraremos um triângulo (com vértices no centro da circunferência e nos pontos P e Q) a esse setor. Dessa forma, obteremos metade da lente. A respetiva representação gráfica obtém-se, atribuindo uma cor ao setor circular e colocando o triângulo a branco, escolhendo depois nas propriedades avançadas dos dois objetos a camada (*Layer*) 1 e a camada 2, respetivamente (figura 5).

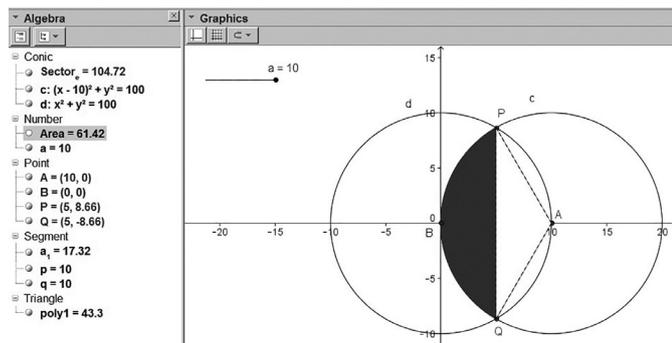


Figura 5. Sobrepondo um triângulo (branco) a um setor circular (sombreado) surge a representação de um segmento circular

Como se pode ver na janela de álgebra, a área do setor circular é calculada de imediato (104.72) e a área do triângulo é também obtida automaticamente (43.3). Basta fazer a diferença entre estes valores para obtermos a área de meia lente. Assim, quando o raio é 10, essa área é 61.42. Portanto, nesse caso, a área da lente terá o valor de 122.84 (figura 6).

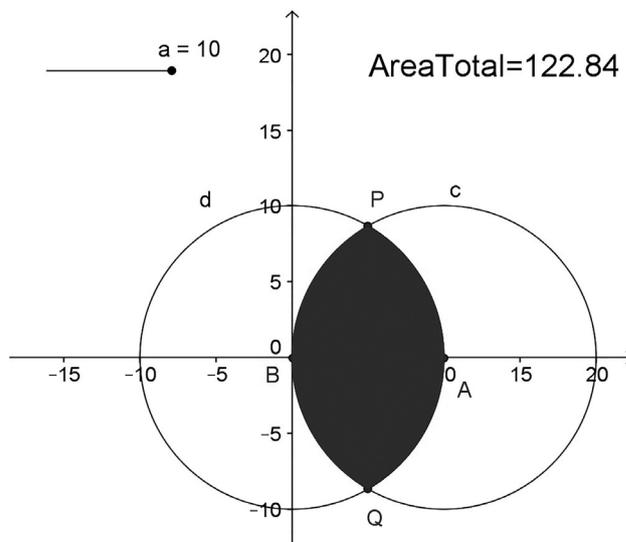


Figura 6. A representação da lente, com base em duas meias-lentes, e respetiva área

O valor exato da área da lente pode ser encontrado sem grandes cálculos. O ângulo ao centro  $\angle PAQ$  é um ângulo específico desta lente:  $120^\circ$ . Este facto pode ser facilmente verificado, notando que o triângulo PAB é equilátero, pelo que o ângulo  $\angle PAB$  mede  $60^\circ$ . Assim, a área do setor circular é:  $A(\text{setor}) = \frac{\pi a^2}{3}$ . Quanto à área do triângulo isósceles de vértices P, A e Q, sabe-se que a base tem o comprimento  $\overline{PQ} = \sqrt{3}a$  e a altura é  $\frac{a}{2}$ . Depois, calculando a diferença entre a área do setor e a área do triângulo e multiplicando o resultado por 2, tem-se a área da lente:  $A(\text{lente}) = \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right) a^2$ .

O resultado permite afirmar que a área da lente é diretamente proporcional ao quadrado do raio (parâmetro  $a$ ). Mas existe a hipótese de criar, na janela de Folha de Cálculo, uma tabela de valores representando a variável  $a$  e a variável *Área da lente*. A tabela obtém-se, gravando os dados destas variáveis em duas colunas à medida que se desloca o seletor (entre 0 e 10) (figura 7).

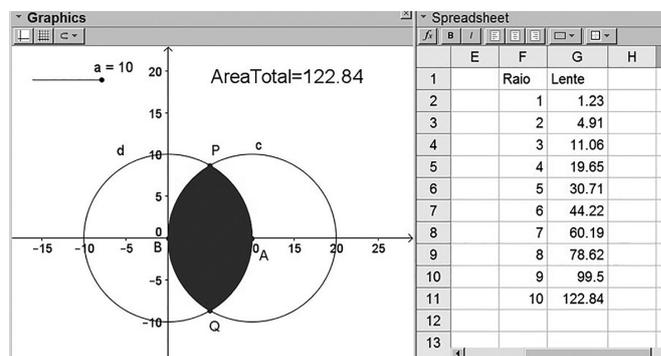


Figura 7. A recolha dos valores das duas variáveis numa janela de Folha de Cálculo, à medida que se faz variar o valor de  $a$

Fazendo a regressão bivariada, observa-se a representação gráfica de uma função quadrática e a respetiva expressão analítica:  $y = 1.23x^2$  (figura 8).

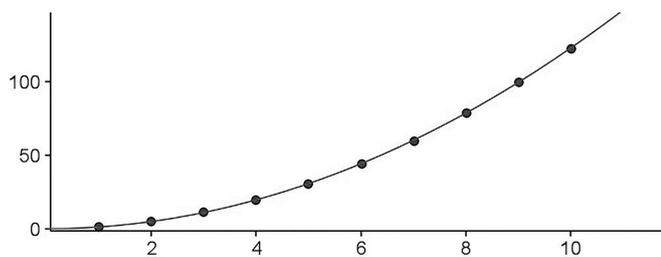


Figura 8. Gráfico da curva ajustada ao conjunto de pontos representados na tabela

Compreende-se facilmente que a área da lente varia com o quadrado do raio, já que esta é também a lei de variação da área do círculo como função do seu raio. A constante de proporcionalidade,  $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ , é menos óbvia e constitui uma das características específicas desta lente especial.

Uma breve síntese das várias potencialidades que o GeoGebra ofereceu para trabalharmos sobre as questões lançadas numa situação de geometria analítica fica espelhada nas diversas janelas (Álgebra, Gráficos, CAS, Folha de Cálculo) que fomos gerando e manipulando, em torno da resolução das sucessivas questões (figura 9):

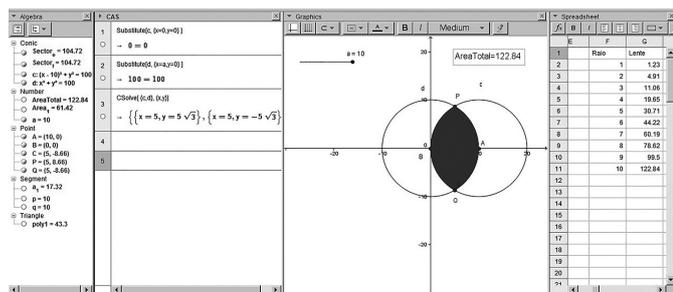


Figura 9. As diversas janelas do GeoGebra utilizadas na resolução das diversas questões

### A VESICA PISCIS: UMA PONTE COM A ARTE

*Vesica Piscis* é o nome atribuído a esta figura geométrica (região de interseção de dois círculos com o mesmo raio e cujos centros estão separados entre si por uma distância igual ao raio). O nome da figura tem origem no Latim e literalmente significa *bexiga de peixe*.

De facto, a tarefa de geometria analítica que colocámos no início tem a ver com a construção da *Vesica Piscis* e leva-nos a algumas das suas características especiais. Desde logo, a *Vesica Piscis* conduz à construção da raiz quadrada de 3. Como verificámos, se o raio dos círculos for igual a 1, a altura da *Vesica Piscis* é  $\sqrt{3}$ . Outro resultado é a medida da sua área, para um raio

unitário:  $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} \approx 1.23$ .

A *Vesica* tem uma extraordinária importância na geometria e na arte e tem igualmente atraído a atenção dos matemáticos, designadamente pelas relações que esta permite estabelecer com outros conceitos (como é o caso do número de ouro) e pela forma como se liga a outras construções geométricas. É oportuno referir, além disso, que a *Vesica Piscis* é atualmente objeto de estudos diversos e constitui tema de investigação em teses de mestrado e de doutoramento, designadamente em Belas Artes. Refiram-se, como exemplos, a tese de mestrado em Desenho, de Filipe Alberto da Silva (2013), e a tese de doutoramento em Ciências da Arte, de Simão Palmeirim Costa (2016). No primeiro destes trabalhos, é dito no resumo: "... de régua e compasso, revelaram-se exaustivamente (mas seguramente não todas) as construções possíveis de serem construídas por duas circunferências ou dois arcos apenas" (p. do Resumo).

Há, com efeito, toda uma mística que envolve a *Vesica Piscis* e que a torna numa construção especial, muito em virtude da sua simplicidade e da forma como dessa simplicidade podem nascer variadas construções, mas também de algumas das suas propriedades e de uma certa harmonia estética básica que consegue imprimir em muitas obras notáveis de arquitetura e pintura. Silva (2013) apresenta, no seu estudo, uma resenha histórica sobre a origem e a presença da *Vesica Piscis*, desde a Pré-história até ao Renascimento. Segundo o autor, o mais antigo testemunho encontrado em Portugal da *Vesica Piscis*, que reproduzimos na figura 10 (a *Vesica Piscis* na construção de um triângulo equilátero), é o legado de um arquiteto chamado António Rodrigues. Viveu no século XVI, foi arquiteto de obras régias e a ele se atribui a autoria de um Tratado de Arquitetura datado de 1576.

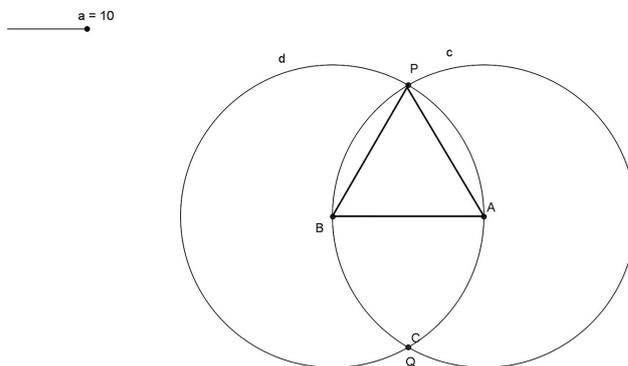


Figura 10. A *Vesica Piscis* na construção de um triângulo equilátero

A figura que se segue (figura 11) foi retirada da galeria digital *The Web Gallery of Art* (<https://www.wga.hu/index.html>), um repositório aberto de obras de arte e arquitetura da Europa,

do século VIII ao século XIX, que contém muitos milhares de reproduções de obras. A imagem é de uma escultura em madeira policromada, datada do período 1200-20, da autoria de um artista Catalão desconhecido. Representa *Cristo em Majestade e os Apóstolos*, podendo ser encontrada no Museu Nacional de Arte da Catalunha, em Barcelona. A imagem mostra perfeitamente a *Vesica Piscis* (ou, segundo alguns autores, a *Mandorla* que se reduz aos dois arcos de circunferência que delimitam a lente).



Figura 11. Foto de escultura em madeira representando “Cristo em Majestade e os Apóstolos” (disponível em <https://www.wga.hu/index.html>)

No GeoGebra, podemos importar a imagem e sobre ela realizar a construção da *Vesica Piscis*, como se ilustra na figura seguinte. Para o efeito, foi-se deslizando o cursor no seletor até se chegar a um ajuste razoável (figura 12).

A imagem pode agora impelir-nos a levantar algumas outras questões: Qual será, aproximadamente, a relação entre a altura e a largura desta peça de madeira? Qual será, aproximadamente,

a relação entre a altura da figura de Cristo e a altura da figura de um Apóstolo? Qual será, aproximadamente, a relação entre a área ocupada pela figura de Cristo (a *Vesica Piscis*) e a área ocupada pela figura de cada Apóstolo? (Uma curiosidade: a peça de madeira, de acordo com os dados disponibilizados pela galeria digital, tem 135 × 98 cm).

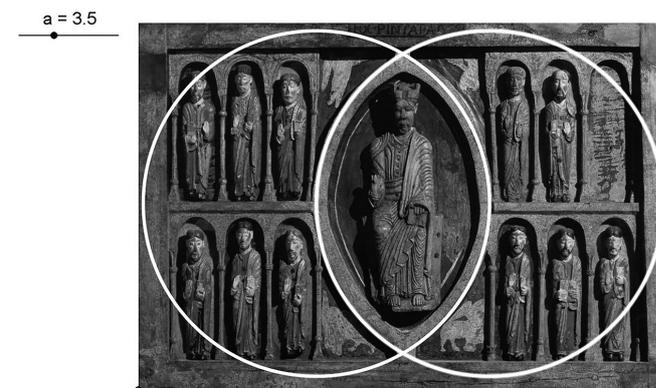


Figura 12. A *Vesica Piscis* construída no GeoGebra sobre a imagem da escultura

Ao leitor, deixamos o convite de pensar sobre estas e outras possíveis questões que podem daqui despontar, não deixando de sublinhar o caráter mesclado, entre o enigmático, o evidente e o surpreendente, que esta construção tão simples nos permite captar nesta peça. Ao mesmo tempo, não podemos deixar de notar que na arte do princípio do século XIII não existia o GeoGebra... mas já existia, há muito, a geometria, o compasso e o esquadro. Temos hoje outras tecnologias e outros media, e somos hoje outros humanos-com-media (Jacinto & Carreira, 2017), podendo usufruir destes media digitais, não apenas para resolver questões de geometria analítica de uma forma mais estimulante e poderosa, levando a raciocinar e aprender ideias matemáticas, mas também como ferramentas que nos permitem investigar o mundo, através da matemática.

## Referências

- Costa, S. P. (2016). *A aquisição do espaço plástico renascentista na pintura portuguesa de c.1411 a c.1525: competências geométricas e compositivas do final da idade média ao renascimento*. (Tese de Doutoramento em Ciências da Arte). Faculdade de Belas Artes, Universidade de Lisboa. [Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/25111>].
- Jacinto, H. & Carreira, S. (2017). Diferentes Modos de Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Matemática para Além da Sala de Aula: Evidências de fluência tecno-matemática. *Bolema*, 31(57), 266-288. [Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0266.pdf>].
- Santos-Trigo M., Reyes-Martínez I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The Use of Digital Technology in Extending Mathematical Problem Solving Reasoning. In L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud – LTEC 2015*, (pp. 298-309). Cham: Springer.
- Silva, F. A. (2013). *A figura da Mandorla e da Vesica Piscis: as suas possibilidades de construção*. (Tese de Mestrado em Desenho). Faculdade de Belas Artes, Universidade de Lisboa. [Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/10249>].

**SUSANA CARREIRA**

UNIVERSIDADE DO ALGARVE E UIDEF – INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

**NÉLIA AMADO**

UNIVERSIDADE DO ALGARVE E UIDEF – INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA