Ensino de conceitos básicos de probabilidade por meio de um jogo de dados e da metodologia de resolução de problemas

João Vitor Teodoro
José Marcos Lopes

Apresentamos neste trabalho um novo jogo, baseado naquele elaborado por Lopes (2006), para o ensino dos conceitos básicos de probabilidade. Por uma questão de espaço, consideraremos aqui apenas alguns dos muitos problemas que elaboramos envolvendo situações de jogo, onde suas soluções induzem os alunos na construção/reconstrução dos conceitos matemáticos estudados.

O JOGO

O jogo consiste no lançamento simultâneo de dois dados e deve ser disputado por dois jogadores, diremos João e Maria, onde um jogador joga após o outro terminar a jogada. Supondo que João jogue primeiro, então ele lança os dois dados simultaneamente e sua pontuação corresponde à soma das faces superiores dos dados, caso queira, poderá repetir o lançamento com os dois dados mais uma vez, mas os pontos desse segundo lançamento substituirão os pontos do primeiro. O mesmo ocorre com Maria. Vence o jogo quem obtiver a maior pontuação.

Questões que poderão ser colocadas aos alunos:

1. O jogador deve sempre aproveitar o segundo lançamento?
2. O segundo jogador possui vantagens sobre o primeiro jogador?

ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

Problema 1. Quantas e quais são as pontuações possíveis nesse jogo?

Solução. Sabendo-se que cada dado tem os valores das faces variando de 1 até 6 e, que, para uma possível pontuação, somam-se dois desses valores. Então, podemos ter as seguintes pontuações: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12. Portanto, existem onze possibilidades de pontuação.

Problema 2. De quantas maneiras diferentes o jogador poderá marcar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 pontos?

Solução. Denotaremos por (face do dado um; face do dado dois) as possíveis faces superiores dos dados sorteadas. Então, independentemente do jogador utilizar um ou dois lançamentos, para marcar:

> dois pontos temos {(1; 1)}; três pontos temos {(1; 2), (2; 1)}; quatro pontos temos {(1; 3), (2; 2), (3; 1)}; cinco pontos temos {(1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1)}; seis pontos temos {(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)}; sete pontos temos {(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1)}; oito pontos temos {(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2)}; nove pontos temos {(3; 6), (4; 5), (5; 4), (6; 3)}; dez pontos temos {(4; 6), (5; 5), (6; 4)}; onze pontos temos {(5; 6), (6; 5)}; doze pontos temos {(6; 6)}.

Nos problemas 1 e 2, consideramos os acontecimentos da experiência aleatória "Lançamento de dois dados" e, observamos que a união de todos esses subconjuntos que fornecem as possibilidades de faces sorteadas (acontecimentos elementares), forma o espaço amostral da experiência.

Dessa forma, no caso do jogo considerado, o espaço amostral das possíveis faces sorteadas nos dois dados, que representaremos por S, é dado por 36 elementos.

DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

Problema 3. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, João terá mais chances em obter sete ou oito pontos?

Solução. Como foi visto no problema 2, há seis possibilidades entre 36 existentes de se fazer sete pontos, isso corresponde à fração $\frac{6}{36} \approx 16{,}67\%$. E, há cinco possibilidades entre 36 existentes de se fazer oito pontos, isso corresponde à fração $\frac{5}{36} \approx 13{,}89\%$. Portanto, como $\frac{6}{36} > \frac{5}{36}$, João terá mais chances em obter 7 do que 8 pontos.

Na resolução do problema 3 temos utilizado a noção de proporção entre a parte e o todo. Estamos assim, usando intuitivamente a definição de probabilidade de Laplace como sendo o quociente entre o número de casos favoráveis (número de elementos do evento) e o número total de casos possíveis (número de elementos do espaço amostral).

Assim, $p = P(\text{Evento}) = \dfrac{\text{número de elementos do Evento}}{\text{número de elementos do Espaço Amostral}}$

Esta definição é válida apenas para espaços amostrais finitos com acontecimentos elementares equiprováveis, possibilitando resolver problemas como: Qual a probabilidade de João obter 10 pontos?

As probabilidades para cada uma das pontuações possíveis, considerando-se apenas o primeiro lançamento são apresentadas na figura 1.

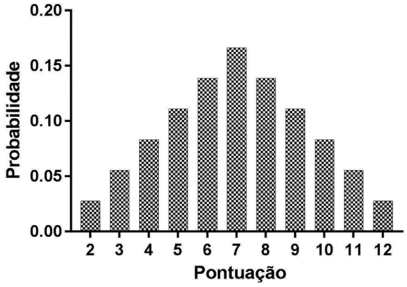

Figura 1. Gráfico com pontuações possíveis e suas respectivas probabilidades no primeiro lançamento

Problema 4. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João não obter 10 pontos?

Solução. Este problema pode ser utilizado para introduzir o importante conceito de evento complementar. Para a solução do problema calculamos a probabilidade de João obter 10 pontos e depois subtraímos do todo (100% ou 1).

Como a probabilidade de João marcar 10 pontos é 8,33%, teremos então que a probabilidade de não marcar 10 pontos será dada por:

$$p = 100\% - 8,33\% \approx 91,67\%$$

O evento complementar é denotado por $\bar{A}$ e $P(\bar{A}) = 1 - P(\mathrm{A})$.

Problema 5. Se João obteve 7 pontos no primeiro lançamento, qual a probabilidade de manter, aumentar ou diminuir sua pontuação se decidir usar o segundo lançamento?

Solução. Para manter a pontuação João deve obter 7 pontos no segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade $p = \frac{6}{36} \approx 16,67\%$.

Para diminuir sua pontuação, João deve obter 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos no segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade $p = \frac{15}{36} \approx 41,67\%$.

Para aumentar sua pontuação, João deve obter 8, 9, 10, 11 ou 12 pontos em seu segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade $p = \frac{15}{36} \approx 41,67\%$.

João pode diminuir a pontuação quando utiliza o segundo lançamento e deve decidir em quais casos é vantajoso lançar novamente. Apresentamos na figura 2 as probabilidades que João possui para aumentar sua pontuação, assim deverá adotar a seguinte estratégia.

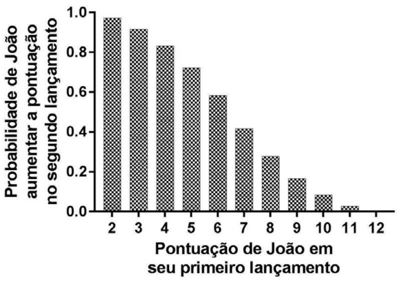

Figura 2. Pontuações possíveis e respectivas probabilidades de aumentá-las no segundo lançamento

Estratégia de João: Se João obtém 7 pontos ou mais em seu primeiro lançamento então ele pára. No caso contrário, isto é, se obtém 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos em seu primeiro lançamento então usará o seu segundo possível lançamento.

Deve-se observar que se João marcou 3 pontos em seu primeiro lançamento então usará o segundo lançamento e poderá diminuir sua pontuação. A estratégia de Maria deve ser diferente, ela já conhece a pontuação obtida por seu opositor.

SOMA E PRODUTO DE PROBABILIDADES

Problema 6. Qual a probabilidade de João obter 2 pontos neste jogo?

Solução. João obtém 2 pontos no seguinte caso:

- Obtém 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos no primeiro lançamento e obtém 2 pontos no segundo lançamento. Temos assim a probabilidade, $p = \frac{15}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{15}{1296} \approx 1,16\%$

Observar o papel do "e" na solução do problema 6. Neste caso devemos multiplicar as probabilidades referentes ao primeiro e segundo lançamento.

Problema 7. Qual a probabilidade de João obter 7 pontos neste jogo?

Solução. João obtém 7 pontos nos seguintes dois casos:

- Obtém 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos no primeiro lançamento e obtém 7 pontos no segundo lançamento. Temos neste caso a probabilidade, $p_1 = \frac{15}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{90}{1296}$
- Obtém 7 pontos no primeiro lançamento. Temos neste caso a probabilidade, $p_2 = \frac{6}{36}$

Portanto, a probabilidade de João obter 7 pontos será dada por:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{90}{1296} + \frac{6}{36} = \frac{306}{1296} \approx 23,61\%$$

A figura 3 apresenta as probabilidades que João possui para marcar 2, 3, 4, ... , 12 pontos no jogo. A pontuação mais provável é 7 com aproximadamente 24% e a menos provável é 2 com aproximadamente 1%.

Observar na solução do problema 7 o papel do "ou", por isso somamos as probabilidades dos dois casos.

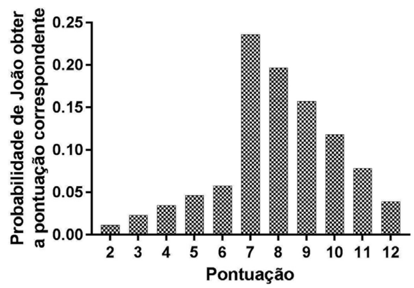

Figura 3. Pontuações possíveis do jogo e suas respectivas probabilidades de João pontuar no jogo

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Problema 8. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João marcar 7 pontos, sabendo-se que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo?

Solução. Quando lançamos dois dados temos um espaço amostral S constituído de 36 resultados possíveis, neste caso a informação que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo, reduz o espaço amostral para {(2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5)}, ou seja, 15 elementos (espaço amostral reduzido, notação: S'). Destes 15 elementos, João pode marcar 7 pontos em três deles, quando ocorrer (4; 3), (5; 2) ou (6; 1). Assim, a probabilidade de João marcar 7 pontos no primeiro lançamento, sabendo-se que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo dado é $p=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

A informação fornecida *a priori* altera o valor da probabilidade, ou seja, o cálculo da probabilidade está condicionado à informação tida *a priori*. O número de casos possíveis (S') varia de um problema para outro. Entretanto, para todos estes problemas, estamos calculando a probabilidade condicional como o quociente:

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\#S'},$$

onde #S' representa o número de elementos do conjunto S'.

Para o problema 8, vamos definir os seguintes acontecimentos:

A = {João marcou 7 pontos no primeiro lançamento dos dois dados} e

B = {O número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo}.

Desejamos calcular a probabilidade de ocorrer o acontecimento A, sabendo-se que o acontecimento B já ocorreu. A notação comumente utilizada é P(A|B).

Temos neste caso, B = {(2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5)}, com 15 elementos. Assim, $P(B)=\frac{15}{36}$.

Ainda, A = {(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1)} e A⋂B = {(4; 3), (5; 2), (6; 1)}, com 3 elementos. Assim, $P(A|B)=\frac{3}{36}$.

Das probabilidades calculadas acima e do resultado do problema 8, obtemos:

$$P(A|B) = \frac{3}{15} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A relação acima não se verifica apenas para o caso particular do problema 8. Esta relação é a definição do conceito de probabilidade condicional.

UM ÚLTIMO PROBLEMA

Estratégia de Maria: se obtém pontuação maior do que João em seu primeiro lançamento, então o jogo termina com a vitória de Maria. Se obtém pontuação menor do que João em seu primeiro lançamento então utiliza o seu segundo lançamento. Agora, quando empata com João em seu primeiro lançamento então realiza o segundo lançamento se, e somente se João obteve uma pontuação menor do que 7.

Problema 9. Se João marcou 3 pontos qual a probabilidade de Maria vencer, perder ou empatar o jogo?

Solução. Maria vence o jogo nas seguintes duas condições:

- Obtém 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 pontos no primeiro lançamento. Isto ocorre com probabilidade $p_1=\frac{33}{36}$
- Obtém 2 ou 3 pontos no primeiro lançamento e obtém 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 pontos no segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade $p_2=\frac{3}{36}\times\frac{33}{36}=\frac{99}{1296}$

Portanto, a probabilidade de Maria vencer será dada por:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{33}{36}+\frac{99}{1296}=\frac{1287}{1296} \approx 99,31\%$$

Maria perde o jogo se obtém 2 ou 3 pontos no primeiro lançamento e 2 pontos no segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade $p=\frac{3}{36}\times\frac{1}{36}=\frac{3}{1296}\approx 0,23\%$

Maria empata o jogo se obtém 2 ou 3 pontos no primeiro lançamento e obtém 3 pontos no segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade $p=\frac{3}{36}\times\frac{2}{36}=\frac{6}{1296}\approx 0,46\%$

Usando o Teorema da Probabilidade Total, podemos mostrar que a probabilidade de Maria vencer o jogo é 45,22%, de perder é 38,47% e a de empatar é 16,31%. Assim, concluímos que a probabilidade de Maria vencer o jogo é maior do que a probabilidade de perder. Esta observação já havia sido feita anteriormente; o segundo jogador está numa situação melhor, ele já sabe a pontuação obtida por seu opositor.

Utilizar a estratégia e o conhecimento pode trazer certas vantagens nos jogos e nas situações cotidianas, em relação às decisões intuitivas ou tomadas impulsivamente. Muitas vezes, mesmo que de forma impercetível, lidamos com pessoas que propõem situações, estando em um cenário vantajoso. É imprescindível compreender e sistematizar, por meio da matemática, essas situações, de forma a estabelecer uma relação igualitária.

Referências bibliográficas

LOPES, J. M. (2006).Probabilidade condicional por meio de resolução de problemas. *Revista do Professor de Matemática, 62,* 34-38. São Paulo: SBM.

João Vitor Teodoro

Universidade Federal do Triângulo Mineiro

José Marcos Lopes

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho