

Esferas e aproximações de esferas — definição e definições.

A PROPÓSITO DA NATUREZA E DO PAPEL DAS DEFINIÇÕES EM GEOMETRIA

Uma das ideias que considero mais marcantes sobre a natureza e o papel das definições em geometria é a preocupação de Coxeter (1973) ao definir polígono. Este matemático afirma no início do livro que vai considerar uma definição e que depois, mais à frente no mesmo livro, vai considerar outra. Além disso é notável o cuidado que Coxeter tem em associar sistematicamente a ideia de possibilidade quando refere definições. “Podemos definir” é uma expressão recorrente para este geômetra.

Conhecendo o destaque que é dado às definições no ensino da geometria, nunca é demais refletir sobre a natureza dinâmica das definições e discutir as consequências desse dinamismo para o papel que estas podem ter no ensino e na aprendizagem. Nesta caso, escolho a esfera como objeto de debate.

A ESFERA

Este objeto geométrico está praticamente ausente da aprendizagem nos primeiros anos de escolaridade. É quase exclusivamente relegado para o papel de contraexemplo de poliedro. No entanto, a esfera é o sólido geométrico com simetria perfeita, simultaneamente o mais móvel e mais instável. Está também muito presente no nosso dia a dia, sendo as suas aproximações objetos comuns. Poderia e deveria por isso ter um papel mais relevante na aprendizagem.

Mas afinal de que falamos quando queremos referir uma esfera? Nesta discussão recorro às ideias de Baruk (2005) por as considerar as mais completas e dinâmicas. Para falar de uma esfera, esta matemática parte da superfície esférica e evidencia duas ideias importantes:

- uma superfície esférica é uma superfície cujos pontos estão todos à mesma distância de um ponto chamado centro;
- uma superfície esférica encerra uma porção de espaço, ou seja, um volume, a que se chama esfera” (Baruk, 2005, p. 437).

E acrescenta ainda. “Os pontos de uma superfície esférica são todos aqueles cuja distância ao centro é igual ao raio. Os pontos da esfera são todos aqueles cuja distância ao centro é inferior ao raio. Se a esfera inclui a superfície esférica considera-se fechada, no caso contrário considera-se aberta”.

Gosto especialmente da observação de Baruk: “Quando a palavra “esfera” figura num enunciado sem mais precisão, é porque se trata de uma esfera fechada” (2005, p. 437).

Tenho encontrado outras definições de esfera. Esfera é definida

como “o conjunto dos pontos do espaço tridimensional que estão à mesma distância de um ponto fixo, chamado centro” (Musser, Burger & Peterson, 2006, p. 623). Esta definição considera apenas a superfície esférica e é comum em outros livros de referência de origem anglo saxónica.

No livro de geometria Elementos de Geometria (Fernandes, p. 478): “Esfera é o sólido gerado por um semicírculo (semicírculo gerador) que roda em torno do seu diâmetro (eixo) até dar uma volta completa”. Nesta definição a esfera é considerada como um sólido de revolução.

Para já temos definições que não são totalmente equivalentes e definições que recorrem a propriedades distintas da esfera. Seguramente que podemos obter outras definições se atendermos a outras propriedades da esfera. Para isso é útil procurar maneiras distintas de estruturar espacialmente a esfera, isto é, de conceber vários tipos de estruturas que permitem obter ou compor uma esfera.

A ESTRUTURAÇÃO DA ESFERA

Um balão cheio pode ser uma boa imagem de uma superfície esférica. Assim como uma bola de basquete ou de andebol. As bolas de futebol já são aproximações à esfera de outra natureza pois são poliedros.

Os deliciosos bombons Baci são boas aproximações a esferas fechadas em que a superfície esférica é de chocolate e o interior é um saboroso recheio com avelãs. Mas é verdade que há outros bombons que são aproximações mais perfeitas da esfera.

As laranjas são esferas quase perfeitas. Podemos destacar a casca como uma superfície esférica e o interior que revela uma estrutura de gomos muito apelativa. Começamos a encarar a esfera como um sólido de revolução.

O que acontece quando cortamos uma esfera por um plano? Obtemos sempre um círculo. A esfera é o único sólido que tem esta propriedade, isto é, qualquer corte determinado por um plano gera sempre uma figura plana do mesmo tipo. Nem o cubo tem esta propriedade. Não há maneira de cortar uma esfera e obter uma outra figura que não seja um círculo. Há algum tempo, numa sessão de formação, ficámos todas estupefactas e algo incrédulas com esta propriedade da esfera. Nunca tínhamos encarado a esfera deste ponto de vista. Obtivemos a confirmação desta propriedade no dicionário de Baruk.

A propriedade anterior tem uma situação de restrição quando o corte da esfera passa pelo centro. Neste caso, obtemos círculos máximos ou meridianos. Esta propriedade permite obter uma esfera estruturada a partir de um conjunto de círculos máximos como mostra a figura 1. Faço notar que embora usemos a designação de “círculos máximos”, o que temos são circunferências.

Um berlinde de vidro é uma esfera que não revela a estrutura. Pode ser útil para medir o volume da esfera e obter de um modo concreto a inesperada relação entre o volume de uma esfera e o de um cilindro circunscrito. Recordo que esta relação é de $2/3$. Entre os objetos do nosso dia a dia descobrimos várias estruturas espaciais da esfera. Todas elas reveladoras de relações significativas do objeto tridimensional com os seus elementos constituintes bidimensionais. São excelentes exemplos da relação 3D-2D.



Figura 1

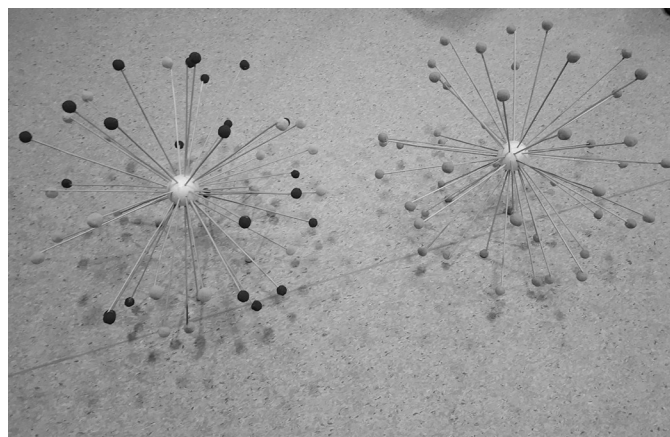


Figura 2



Figura 3

COMENTÁRIOS FINAIS

A superfície esférica é uma superfície não planificável. Talvez por isso tenhamos a ideia de que é uma superfície difícil de obter. No entanto, as estruturas de que falámos dão excelentes pistas para construir objetos esféricos que são muito boas aproximações à esfera. Para este trabalho foram inspiradoras as obras de alguns artistas que são sem dúvida nenhuma quem melhor explora estas relações.

Apresentamos um conjunto de objetos esféricos construídos pelas crianças em dois jardins de infância. Na figura 1 as esferas são construídas a partir de tiras de papel iguais para obter círculos máximos, na figura 2 a estruturação é feita a partir dos raios. Apresentamos também uma aproximação à esfera, do artista Rui Sanches (2017), em que a estruturação é feita a partir de planos paralelos (figura 3).

Referências bibliográficas

- Baruk, S. (2005). *Dicionário de Matemática Elementar*. Edições Afrontamento.
- Coxeter, H. S. M. (1973). *Regular Polytopes*. New York: Dover Publications.
- Fernandes, A. (sem data). *Elementos de Geometria*. Coimbra: Coimbra Editora.
- Musser, G., Burger, W. & Peterson, B. (2006). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach*. USA: John Wiley & Sons.
- Sanches, R. (2017). *Janela, espelho, mapa ...* Lisboa: Sistema Solar.