Linha de rumo de Pedro Nunes

Eduardo Veloso

Este é o terceiro e último artigo de uma série que dedicámos a um dos resultados mais importantes do matemático português Pedro Nunes, a *linha de rumo*, designada actualmente por *loxodrómia*. Está completamente fora do âmbito dos textos publicados nesta revista a apresentação da linha de rumo a partir das investigações do próprio Pedro Nunes e da sua transcrição matemática em termos modernos. No entanto, no sentido de combater um ensino de matemática que ignora a história da matemática, nomeadamente em Portugal, seria desadequado não incluir *a linha de rumo* na série de artigos sobre curvas notáveis que temos vindo a publicar na *EM*. É possível, como espero demonstrar neste artigo, apresentá-la de modo acessível e mesmo praticável pelos alunos de matemática, desde que tenham oportunidade de utilizar computadores e um programa de geometria dinâmica. Julgo mesmo que este assunto poderia dar origem a diversos tipos de projectos desenvolvidos por grupos de alunos.

Como cosmógrafo-mor, Pedro Nunes foi defrontado por dúvidas levantadas pelos navegadores portugueses relativas aos longos percursos no Oceano Atlântico, os quais exigiam métodos de navegação diferentes dos adoptados na navegação no Mediterrâneo ou ao longo da costa de Portugal. Daqui resultaram investigações e resultados, que Pedro Nunes tratou em diversos tratados que publicou. A situação de que vamos partir pretende explicar, com um exemplo acessível mas não necessariamente histórico, o tipo de questões que levou Pedro Nunes à descoberta da linha de rumo.[1]

Imaginemos uma nau navegando no Atlântico e que pretende dirigir-se de um ponto A para um ponto B.

O percurso mais curto para navegar de A para B é seguir o arco do círculo máximo que contém os dois pontos, que na figura 1 está indicado por uma linha a preto. Os navegadores estavam convictos, da sua experiência anterior em navegações de curta distância, que se mantivessem, com auxílo da agulha de marear, o ângulo que o trajecto AB faz com o meridiano que passa por A, esse rumo levaria a nau até ao ponto B. Mas verificaram na prática que não, e levantaram esta questão ao cosmógrafo-mor. Pedro Nunes mostra, no seu tratado *Sobre a arte e a ciência de navegar*, que a curva descrita pela nau, se mantivesse esse rumo, iria afastá-la do arco AB. Explica que a nau descreveria uma curva – a *linha de rumo* – que, no nosso modo actual de nos exprimirmos, seria uma espécie de espiral sobre a esfera terrestre, que se estenderia na direcção dos pólos. Inicialmente Pedro Nunes julgava que a linha de rumo atingiria os pólos, mas posteriormente concluiu que se aproximaria deles sem nunca os atingir (assintoticamente, diríamos nós ...). É a curva a cor da figura 1.

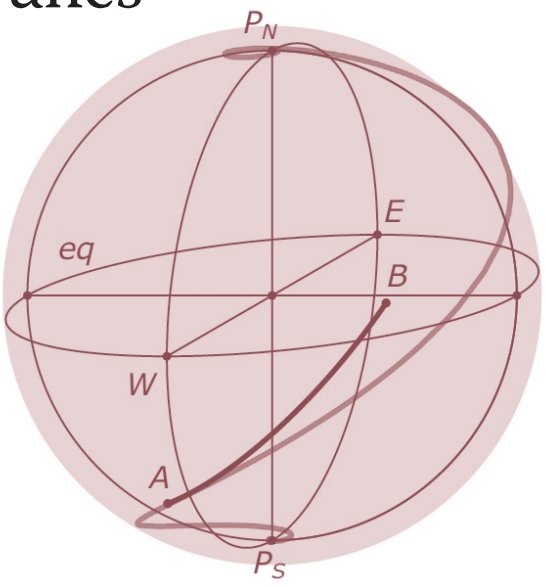

Figura 1

A recomendação feita aos pilotos pelo cosmógrafo-mor é que adoptem o trajecto mais curto entre A e B (o arco a negro de círculo máximo), mas que para isso terão que fazer sucessivas alterações ao rumo seguido, contrariamente ao que esperariam. Neste artigo, iremos mostrar como, utilizando um programa de geometria dinâmica — que no nosso caso será o *Geometer's Sketchpad* — é possível estudar e visualizar, de modo relativamente simples, esta descoberta de Pedro Nunes.

Aconselhamos o leitor a ler, antes de continuar, os artigos anteriores[2] e o texto de Henrique Leitão sobre a *vida e obra* de Pedro Nunes (neste número da revista).

Como as figuras que apoiam o texto são necessariamente simplificadas e não podem mostrar todas as construções necessárias, são acompanhadas por vídeos explicativos e outros apoios existentes *online*. O que iremos tentar neste artigo é mostrar, dados dois pontos A e B sobre a esfera, como podemos construir e comparar, *de modo elementar e próprio de um ensino de matemática para todos*:

- O *arco de círculo máximo AB*.
- Uma *linha de rumo* que passe por A e que coincida, no início do trajecto AB, com este arco.

CONSTRUÇÃO DO ARCO DE CÍRCULO MÁXIMO AB

A figura 2 representa as *vistas* e a *perspectiva cavaleira* da esfera terrestre. Eis a sequência de construções a efectuar:

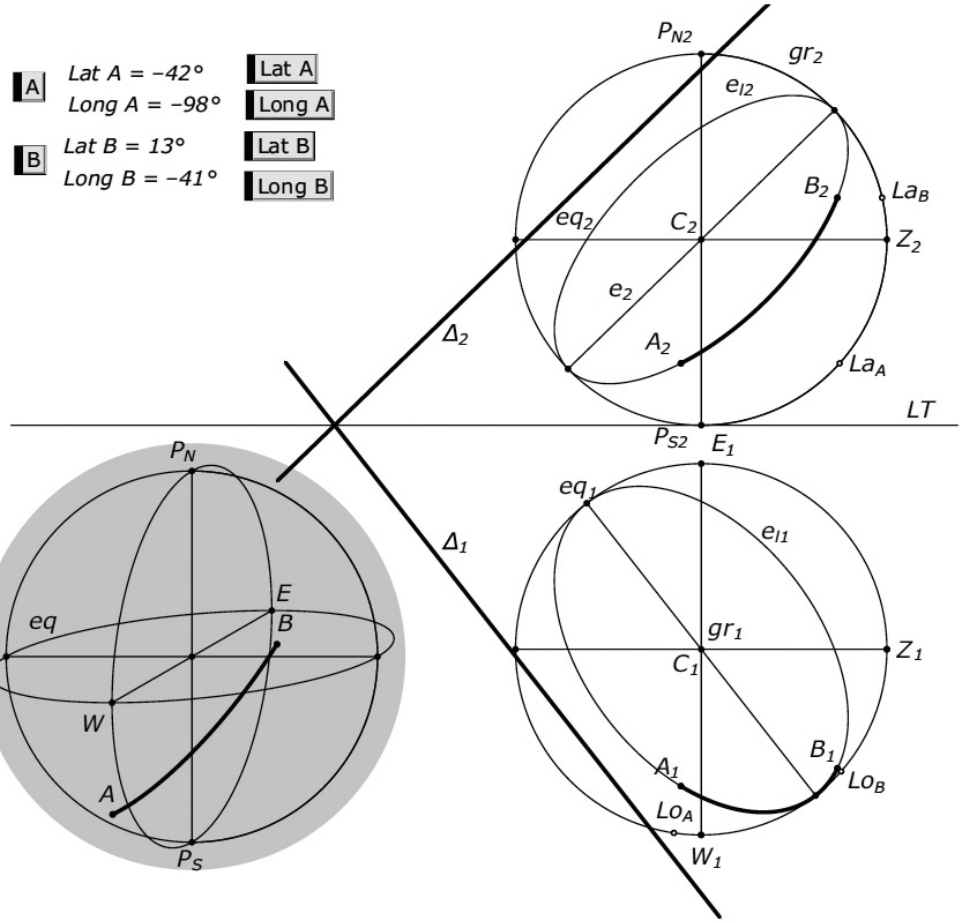

Figura 2

I. *Posição de um ponto a partir das suas coordenadas*

Pretendemos assinalar, sobre as *vistas* e sobre a *perspectiva*, dois pontos *A e B,* conhecidas as suas coordenadas geográficas. Para isso:

- nas preferências do *Sketchpad*, escolhemos "*directed degrees*" e "*units*";
- colocamos um ponto La_A e um ponto Lo_A respectivamente sobre a *vista de frente* do *meridiano de Greenwich* (gr_2) e sobre a *vista de cima* do equador (eq_1);
- medimos os ângulos $Z_2C_2La_A$ e $Z_1C_1Lo_A$ que designamos como *Lat A* e *Long A*; *Z* é a intersecção de *gr* com *eq*;
- arrastamos os pontos La_A e Lo_A *até obtermos os valores desejados ;*
- criamos um outro ponto *B*, da mesma forma.

II. *Construção do arco de círculo máximo entre A e B*

IIa. Determinar os traços do plano Δ (Δ_1 *e* Δ_2) contendo os pontos *A, B e C* (*construção habitual da geometria descritiva*);

IIb. O plano Δ intersecta a esfera no círculo máximo c_m. As vistas deste círculo são duas elipses c_{m1} e c_{m2} cujos eixos maiores são os dois segmentos e_1 e e_2 paralelos respectivamente aos traços Δ_1 *e* Δ_2.

IIc. Construindo o arco Lo_ALo_B, é possível (ver *online*) construir os arcos A_1B_1 e A_2B_2 nas vistas e depois *AB* (*persp. cav.*) com a ajuda do comando *Construct Locus*.

CONSTRUÇÃO DE UMA LINHA DE RUMO[3]

A linha de raciocínio que fundamenta esta construção assenta nos seguintes pontos:

- a *projecção estereográfica* (que designaremos por *St*) — projecta cada ponto da superfície da esfera (excepto P_N) num ponto do plano π_1 tangente à esfera em P_S;
- cada *meridiano* é transformado por *St* numa *semi-recta* de π_1 com origem em P_S;
- tanto *St* como a sua inversa St^{-1} são transformações *conformes* (conservam os ângulos);
- se considerarmos, no plano π_1, uma espiral equiangular *Es* de centro (ou *pólo*) em P_S, essa curva fará o mesmo ângulo α com todas as semi-rectas com origem em P_S;
- a imagem da espiral *Es* por meio de St^{-1} será uma curva sobre a superfície da esfera e, tendo em atenção os dois últimos pontos, fará o mesmo ângulo α com todos os meridianos;
- será então uma *linha de rumo Lr.*

Iremos então prolongar a sequência anterior de construções. Para detalhes nas construções, ver *online*.

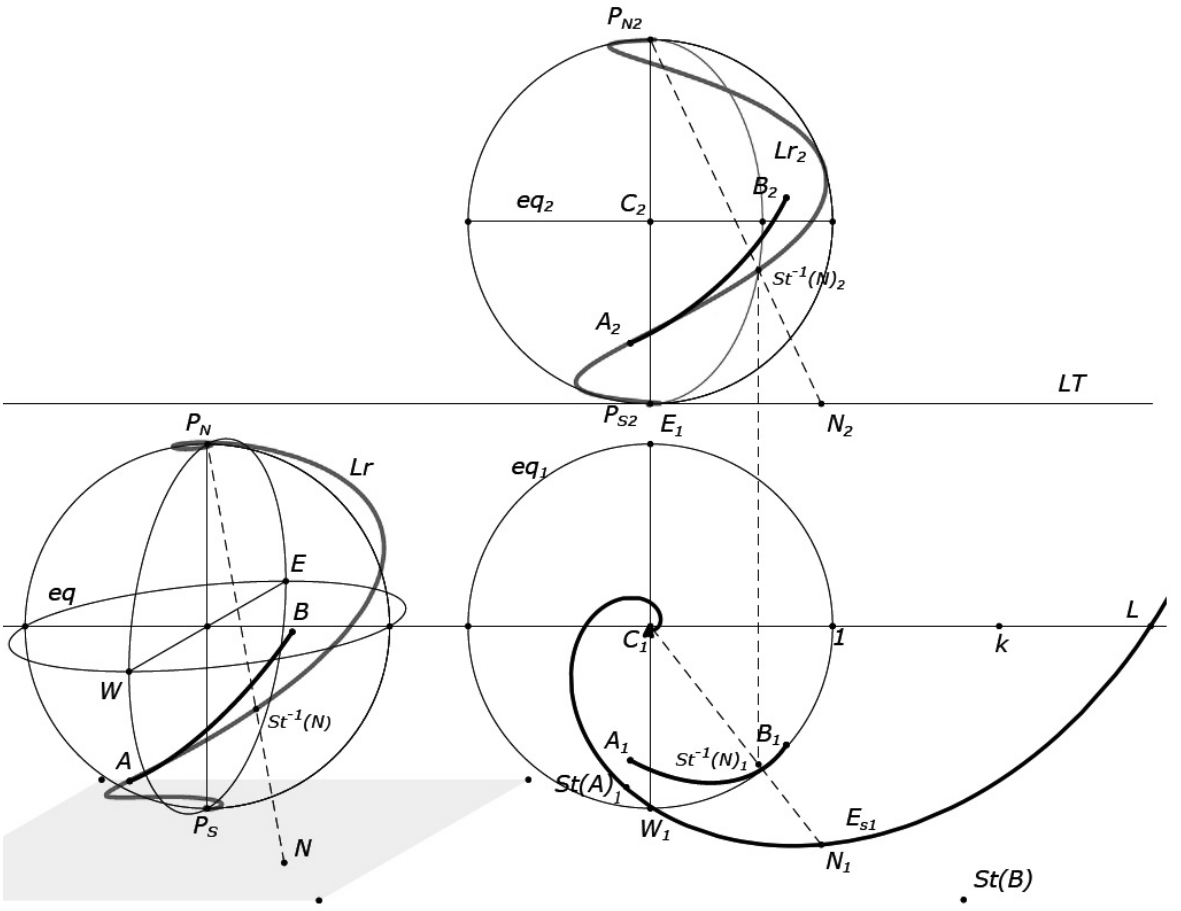

Figura 3

IIIa. *Construção de uma espiral equiangular no plano horizontal:*

- nas preferências do *Sketchpad*, escolhemos "*radians*" e "*tenths*";
- constrói-se um *eixo das abcissas* e nesse eixo os pontos *t, k, L, e L.k^t*;
- rotação (ângulo *t* radianos) do ponto *L.k^t*, obtendo *L.k^t´*;
- seleccionando *t* e *L.k^t´* e clicando em *Construct:Locus* obtém-se a vista de cima da espiral equiangular, Es_1; a vista de frente confunde-se com a *Linha Terra*.

IIIb. *Construção da imagem de Es sobre a esfera — a linha de rumo Lr — , por meio de* St^{-1}:

- constrói-se um ponto genérico *N* sobre sobre E_S e depois a sua imagem $St^{-1}(N)$ sobre a esfera, nas vistas e na perspectiva;
- constrói-se (*Construct:Locus*) o lugar geométrico de $St^{-1}(N)$ na vista de cima (Lr_2) e na perspectiva (*Lr*), como se pretendia.
- constrói-se $St(A)_1$ e ajustam-se *L* e *k* até Es_1 passar por $St(A)_1$ e — *visualmente* — *Lr* coincidir com o arco *AB* na vizinhança do ponto *A*.

Notas:

1. Segue-se uma lista de recursos escritos e online sobre a linha de rumo. É uma resenha necessariamente incompleta.

Livros

PEDRO NUNES. Sobre a arte e a ciência de navegar. *OBRAS*, vol. IV, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.

RAMOND D'HOLLANDER. *Loxodromie et projection de Mercator.* Institut Océanographique, Paris, 2005.

Este livro é muito completo e descreve detalhadamente os trabalhos de Pedro Nunes e a actividade posterior de matemáticos que comentaram e desenvolveram as ideias de Pedro Nunes.

Artigos

Queiró, J. F. (2002). Pedro Nunes e as linhas de Rumo, *Gazeta de Matemática. 143* 42-47.

Randles, W.G.L. (2002). Pedro Nunes e a descoberta da curva loxodrómica, *Gazeta de Matemática*, 143 90-97.

Recursos online

O site de apoio ao conteúdo deste artigo contém, por exemplo, vídeos descrevendo construções no Sketchpad, acesso directo a textos, etc. https://www.eduardoveloso.pt/geom_textos/linha_de_rumo.html

O site do Atractor contém, nos Temas Matemáticos, uma magnífica secção dizendo respeito à curva loxodrómica https://www.atractor.pt

2. Artigos anteriores nas revistas 142, 146 e 147.

3. Ver online os vídeos exemplificativos destas construções.

Eduardo Veloso