O Binómio discriminante de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros

No início deste século, o governo brasileiro institui a necessidade do cumprimento de horas de prática como componente curricular para os cursos de formação inicial de professores. Em 2005, para exemplificar como poderiam funcionar tais práticas, escrevi um texto sobre uma caracterização do discriminante de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros e, no ano de 2017, durante uma discussão sobre prática como componente curricular, utilizei mais uma vez ideias que apresentei naquela ocasião. Um dos estudantes que participava das discussões sugeriu, com a concordância de outros que ali estavam, que eu publicasse tais resultados para torná-los acessíveis a mais pessoas. Atendendo à sugestão, resolvi expor os resultados numa revista que pudesse inclusive transpor as fronteiras brasileiras aproveitando assim para apresentar algumas diferenças terminológicas deste assunto.

Dada uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros, isto é, $ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c\in\mathbb{Z} \quad e \quad a\neq 0$ (1)

utilizando a fórmula resolvente, que no Brasil denomina-se comumente fórmula de Bhaskara[1], pode-se concluir que as soluções da equação são da forma $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

É notória a importância do que em Portugal se denomina binómio discriminante, e no Brasil apenas discriminante, Δ, na resolução de tais equações. No entanto, em diversos casos utilizamos ou calculamos o discriminante e não refletimos se qualquer número inteiro pode ser o resultado do discriminante de uma equação do tipo (1). Você leitor já se perguntou, por exemplo, se o número 7 pode ser o valor do discriminante de uma equação como a que estamos tratando (com coeficientes inteiros)? E o 5?

Vamos responder a essas perguntas provando um resultado que caracteriza o valor do discriminante das equações de segundo grau com coeficientes inteiros, demonstrando que um número inteiro é o discriminante Δ de uma equação do tipo (1) se, e somente se, Δ é um múltiplo de quatro ou um número cuja divisão por quatro tem resto um.

Para essa prova utilizaremos o Algoritmo da Divisão[2] cujo enunciado segue abaixo e cuja demonstração pode ser encontrada em livros de Introdução a Teoria dos Números ou livros de Álgebra Elementar[3].

1 Não se sabe ao certo por que e quando a denominação fórmula de Bhaskara começou a ser utilizada no Brasil e apesar de muitos considerarem tal denominação errónea (afinal tal método de resolução era conhecido antes mesmo do nascimento de Bhaskara) essa expressão é rotineiramente utilizada inclusive em livros didáticos.

2 Que também é denominado Algoritmo da Divisão de Euclides ou Algoritmo de Euclides.

3 Como, por exemplo, [MC] e [AG]

Teorema 1 (Algoritmo da Divisão) *Sejam a e b inteiros, com* $b \neq 0$. *Existem inteiros q e r* únicos *e tais que* $a = bq + r$, *onde* $0 \le r < |b|$.

O algoritmo da divisão diz-nos que qualquer inteiro é da forma $2q$, ou $2q + 1$, para algum $q\in\mathbb{Z}$. Do mesmo modo, qualquer inteiro é da forma $3q$, $3q + 1$, ou $3q + 2$ para algum $q\in\mathbb{Z}$ ou da forma $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ ou $4q + 3$ e assim sucessivamente, conforme a nossa necessidade.

De posse de tais factos, estamos prontos para enunciar e demonstrar a caracterização descrita anteriormente.

Proposição 2 *Um número inteiro* Δ é discr*iminante de uma equação do segundo grau do tipo (1) se, e somente se,* Δ é da forma $4k$ *ou* $4k + 1$, *para algum* $k\in\mathbb{Z}$

Demonstração: Pelo Algoritmo da Divisão sabemos que o inteiro b da equação (1) ou é par, ou é ímpar, isto é, $b = 2q$ ou $b= 2q + 1$, para algum $q\in\mathbb{Z}$, portanto

$\Delta = b^2 - 4ac = 4q^2 - 4ac = 4(q^2 - ac)$ *ou*

$\Delta = b^2 - 4ac = 4q^2 + 4q + 1 - 4ac = 4(q^2 + q - ac) + 1$, ou seja, $\Delta = 4k$ ou $\Delta = 4k + 1$, com $k = (q^2 - ac)$ ou $k = (q^2 + q - ac)$ e portanto $k\in\mathbb{Z}$.

Reciprocamente se $\Delta = 4k$, onde $k\in\mathbb{Z}$, basta tomarmos, por exemplo, os coeficientes $a = 1$, $b = 0$ e $c = (-k)$ na equação (1) e teremos $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-k) = 4k$.

Já se $\Delta = 4k + 1$ com $k\in\mathbb{Z}$, podemos atribuir a a, b e c, respetivamente, os valores 1, 1 e $(-k)$ e assim

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-k) = 4k + 1$.

A propósito, acabamos de responder também às perguntas a respeito do 7 e do 5 feitas anteriormente. Podemos afirmar a partir da proposição anterior que 7 não pode ser o valor do discriminante de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros, pois não pode ser escrito da forma $4k$ ou $4k + 1$, com $k\in\mathbb{Z}$, já que é da forma $4k + 3$, com $k = 1$. E por outro lado, como 5 é da forma $4k + 1$, com $k = 1$, então existe uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros cujo binómio discriminante assume esse valor!

Referências

[AG] Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides - SBM, Rio de Janeiro, 1999.

[MC] Millies, F. C. P. , Coelho, S. P. *Números: Uma Introdução à Matemática*. EDUSP, São Paulo, 2000.

David Pires Dias

IME-USP