Geoplano ordenado e o estudo das frações

José Luiz Pastore Mello

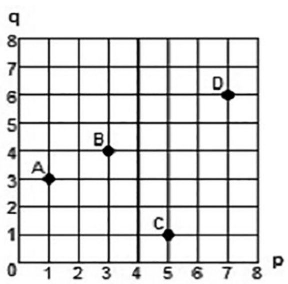
INTRODUÇÃO

A utilização do geoplano como ferramenta didática para o ensino de tópicos da geometria é bem conhecida, contudo, essa abordagem não esgota as possibilidades de uso desse dispositivo didático.

Propõe-se neste artigo a apresentação do uso do geoplano como recurso visual para o estudo dos números racionais e algumas de suas propriedades. A atividade requer um geoplano, que pode ser construído com madeira, cortiça ou placas de isopor. Os pontos da malha podem ser marcados com pregos ou alfinetes.

NÚMEROS RACIONAIS NO GEOPLANO

Números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma de fração $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros, e q ≠0. Vamos associar a cada número racional um par ordenado de inteiros (p,q), o que permitirá a visualização desse número em um geoplano ordenado (geoplano com marcações numéricas). Sem perda de generalidade, simplificaremos nossa análise estudando apenas as frações com numeradores e denominadores positivos em um geoplano 8x8, sinalizando que o estudo torna-se mais interessante em geoplanos maiores (20x20, por exemplo). Vejamos alguns exemplos daquilo que estamos propondo:



Os pontos A, B, C, e D representam, respectivamente, os números racionais $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{1}$ e $\frac{7}{6}$.

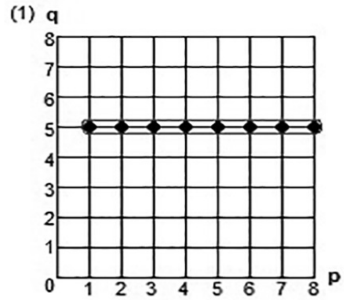
Utilizando elástico, linha ou barbante, podemos começar a praticar o uso do geoplano ordenado fazendo as seguintes marcações:

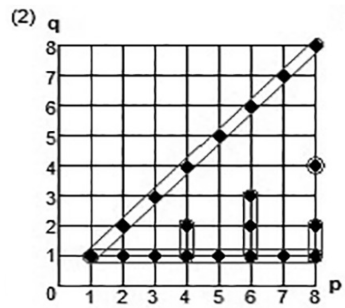
(1) todas as frações com denominador 5;

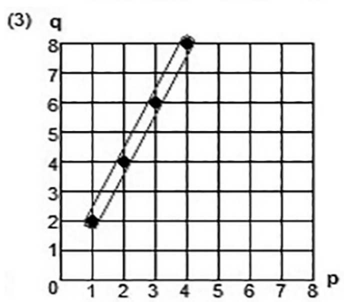
(2) todos os números naturais;

(3) todas as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Respostas:





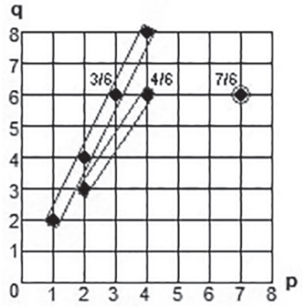


Com esse exercício, o dispositivo permite observar que:

- frações com mesmo denominador necessariamente estão alinhadas horizontalmente;
- frações impróprias (e frações aparentes) estão localizadas na diagonal que passa pela origem, ou à direita dela;
- frações equivalentes necessariamente estão alinhadas com a origem e entre si.

Vejamos agora como proceder para fazer adição de frações utilizando o geoplano ordenado. Por exemplo, para fazer $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$, os passos são:

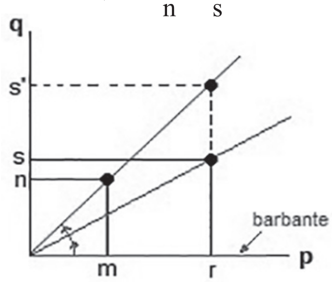
- marcamos o conjunto de frações equivalentes a $\frac{1}{2}$;
- marcamos o conjunto de frações equivalentes a $\frac{2}{3}$;
- procuramos frações nos conjuntos marcados que estejam alinhadas horizontalmente e, nessa mesma linha de alinhamento, encontramos o resultado da soma adicionando os numeradores das frações.



ORDENAÇÃO DOS RACIONAIS NO GEOPLANO

Uma outra tarefa simples que pode ser feita com o uso do geoplano é a ordenação dos elementos de um subconjunto de números racionais.

Para ordenar dois racionais distintos representados por (m,n) e (r,s), inicialmente amarramos na origem do geoplano um barbante, que deve estar alinhado com o eixo p. Rotacionando o barbante esticado em sentido anti-horário, o primeiro par ordenado intersetado representa o maior racional. Vejamos uma justificativa para o caso indicado na figura abaixo, onde queremos ordenar as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$:



No geoplano, dois pontos que representam frações de mesmo numerador sempre estão alinhados verticalmente. Nesse caso, a maior das frações representadas será a de menor denominador, ou seja, será aquela representada pelo ponto mais próximo do eixo p.

Observando a fração $\frac{r}{s}$, representada no geoplano, notamos que existe uma fração $\frac{r}{s'}$, com s'>s, tal que (0,0), (m,n) e (r, s') sejam colineares. Uma vez que pontos colineares a (0,0) representam frações equivalente, comparar (m,n) com (r,s) é equivalente a comparar (r,s') com (r,s). Como (r,s) está mais próximo do eixo p do que (r,s'), segue que $\frac{r}{s} > \frac{m}{n}$.

UMA *FLORESTA* DE RACIONAIS

Imaginemos agora uma situação onde o geoplano representa uma floresta, sendo cada ponto uma árvore muito fina. Se estivéssemos localizados na origem, e olhando para a floresta, que árvores seriam visíveis?

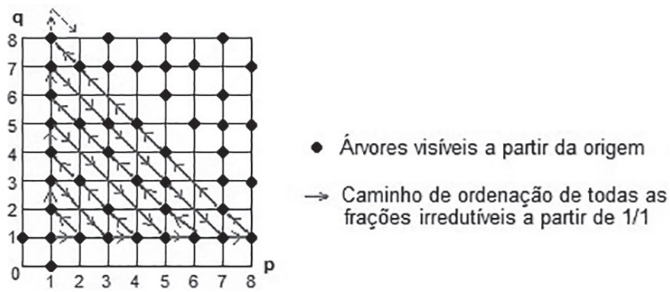
Uma árvore correspondente à fração $\frac{3}{6}$ não seria visível por ter à sua frente as árvores correspondentes a $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Nessa linha de visão, a única árvore visível seria aquela correspondente à fração $\frac{1}{2}$. Explorando essa ideia para outras frações, pode-se dizer que um ponto (p,q) do geoplano é visível da origem se e somente se p e q são números primos entre si, o que implica dizer que as árvores visíveis são aquelas representadas por frações irredutíveis $\frac{p}{q}$.

Se considerarmos uma fração redutível qualquer, como por exemplo $\frac{4}{8}$, encontramos a fração irredutível correspondente ligando os pontos (4,8) e (0,0), e verificando que (1,2) representa a árvore visível que encobre (4,8).

RACIONAIS, UM CONJUNTO ENUMERÁVEL

Sabemos que o conjunto dos racionais é enumerável, o que significa dizer que podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos racionais e dos números naturais (lembramos mais uma vez que, por efeito de simplificação, estamos trabalhando apenas com os racionais positivos).

Uma vez que a representação no geoplano das árvores visíveis a partir da origem indica todas as frações irredutíveis que compõem o conjunto dos racionais, podemos utilizá-la para colocar esses números em fila, o que possibilitará estabelecer a bijeção entre ℕ e ℚ:

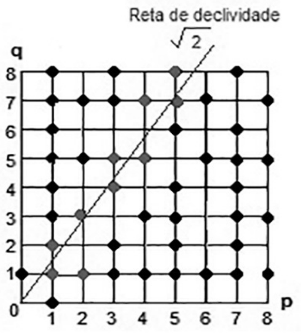


$$\begin{array}{lcccccccccccccccc}
\mathbb{Q}: & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \frac{5}{2} & \frac{4}{3} & \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \ldots
\end{array}$$

OUTRAS POSSIBILIDADES: OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Em um hipotético geoplano infinito, as árvores visíveis da floresta indicariam todos os números racionais. Imaginando um observador localizado na origem do geoplano, e com visão de alcance infinito, poderíamos fazer a seguinte pergunta: - será que para qualquer direção que aponte a linha de visão do observador ele sempre irá enxergar uma árvore?

A resposta a essa pergunta é "não" porque existem números que não podem ser escritos como quociente de inteiros, os números irracionais. Por exemplo, se a linha de visão do observador for uma reta com declividade $\sqrt{2}$, ela nunca intersetará uma árvore. Observando atentamente essa linha, as árvores visíveis da floresta e o inverso das frações que essas árvores representam $\left(\frac{q}{p}\right)$, verificaremos que a linha de declividade $\sqrt{2}$ está *cercada* de aproximações racionais de $\sqrt{2}$. Algumas dessas aproximações cometem erros por excesso, como $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}$ *etc*, e outras por falta, como $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}$ *etc*. Todas as frações $\frac{q}{p}$ que cometem erros por excesso estão localizadas acima da reta de declividade $\sqrt{2}$, e as que cometem erros por falta estão abaixo dessa reta. Lembrando que $\sqrt{2} \approx 1,41...$, observe que as melhores aproximações são aquelas dadas por pontos mais próximos o possível da reta de declividade $\sqrt{2}$. No nosso geoplano 8x8, as melhores aproximações são $\frac{7}{5} = 1,4$ e $\frac{3}{2} = 1,5$. Em geoplanos maiores podemos obter aproximações ainda melhores, como por exemplo $\frac{17}{12}$, que comete erro (por excesso) apenas na terceira casa decimal de $\sqrt{2}$.



Bibliografia

Gardner, M. (1984). The Lattice of Integers. In M. Gardner(Ed), *Martin Gardner´s 6th Book of Mathematical Diversions from Scientific American* (pp 208-219). Chicago, IL.: University of Chicago Press.

Niven, I. (1984). *Números racionais e irracionais.* Rio de Janeiro: SBM.

Watkins, A. E. & Watkins, W.(1980). *Fractions on the geoboard. Mathematics Teacher, 73*(2), pp. 133-139. NCTM.

José Luiz Pastore Mello

Colégio Santa Cruz (São Paulo, Brasil)

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Número racional como quociente

As tarefas que envolvem o processo de partilha (divisão em partes iguais) são a base para a compreensão do número racional como um quociente. Mas é preciso ter em atenção que essa compreensão vai para além da ação física e da representação pictórica da divisão em partes iguais.

Nos contextos dos problemas que propomos, o símbolo $\frac{a}{b}$ tem múltiplos significados:

– Uma divisão (a÷b); No problema 1, são 3 pizas a dividir por 7 pessoas;

– O número racional que é o resultado dessa divisão ($\frac{a}{b}$ de uma piza); no problema 1, $\frac{3}{7}$ de uma piza

– Uma razão (*se temos **a** pizas para **b** pessoas; ou* se tivermos diferentes grupos de pessoas e de pizas e queremos que as partilhas sejam iguais). No problema 1, cada pessoa fica com $\frac{1}{7}$ de piza e o número de pizas partilhado é irrelevante, podem ser 3 ou 300..

Este último contexto (diferentes grupos de pessoas e pizas e queremos que as partilhas sejam iguais) pode potenciar a representação em diagrama de árvore na organização das mesas e das pizas.

Com o último problema proposto podemos potenciar a aprendizagem da adição e subtração de frações.

Após a resolução dos problemas, os alunos têm um conjunto de questões de reflexão, que poderá dar origem a uma discussão plenária em que se podem colocar questões adicionais para verificar a aprendizagem.

Nota: Mais uma vez, esta proposta inspira-se nas sugestões de Susan Lamon de abordagem aos sentidos do número racional, de que já resultou a proposta apresentada na revista 146, só que temos mais um elemento rendido à autora referida.

Adelaide Cosme

Agrupamento de Escolas Poente Domingos Sequeira, Leiria

Isabel Rocha

Manuela Pires

Agrupamento de Escolas Poente Marinha Grande Poente