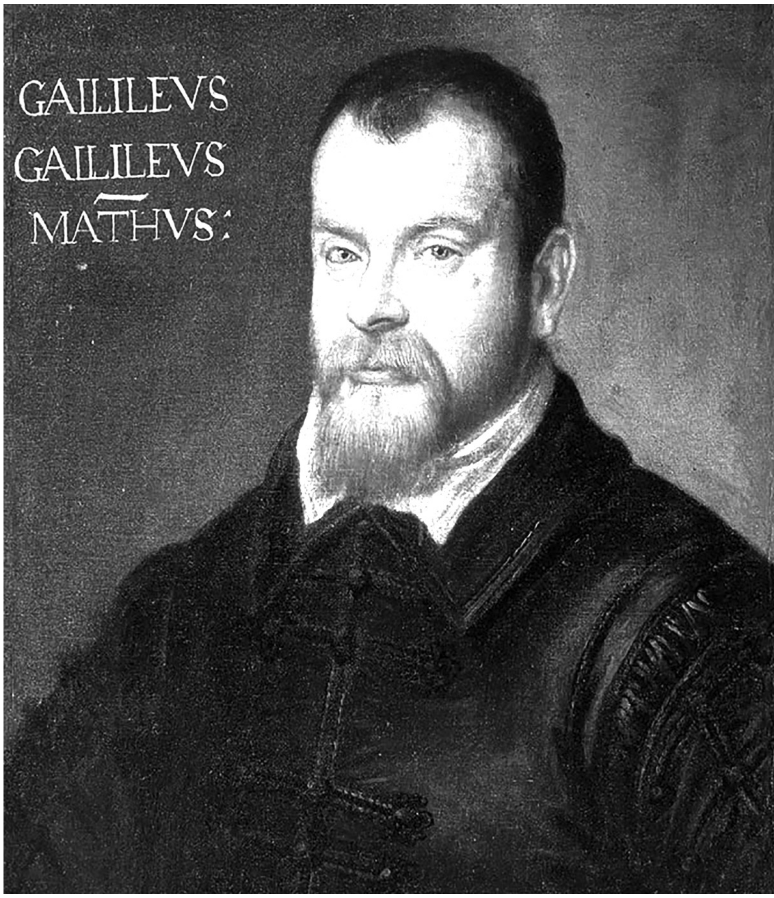
Como Galileu inventou um modelo matemático



"Vejamos: o que constitui a *essência* do corpo, ou da matéria, sem a qual não pode ser pensado — e, consequentemente, não pode ser — é, para Galileu como para Descartes, e para este pelas mesmas razões, as suas propriedades matemáticas. Número, figura, movimento: aritmética, geometria, cinemática. A gravidade não está incluída."

Koyré, A. (1966). *Études Galiléennes*. Paris: Hermann.

INTRODUÇÃO

A utilização de modelos matemáticos para descrever a realidade é muito anterior a Galileu e algo de certo modo intuitivo. Por exemplo, se há 2000 anos um romano antigo quisesse ir de Lisboa a Roma a pé, sabendo que a distância era 1500 milhas, facilmente podia calcular quanto tempo demorava. Bastava conhecer quantas milhas podia andar por dia... e utilizar o seguinte modelo matemático (assume-se que andava 20 milhas por dia, 32 km):

$$\frac{1\,\text{dia}}{20\,\text{milhas}} \times 1500 \text{ milhas} = \frac{1500}{20} \text{ dias} = 75 \text{ dias}$$

Este raciocínio proporcional é certamente muito antigo (não necessariamente nesta forma de produto de um quociente tempo/distância por uma distância).

Galileu, o *Matematico Primario* e filósofo do Grande Duque da Toscânia, foi uma pessoa excecional, com grande irreverência intelectual, sempre disposto a olhar ideias antigas segundo novas perspetivas. Como todos os matemáticos e filósofos, estava interessado na "essência" das coisas, isto é, nas ideias abstratas gerais que permitem dar sentido ao maior número possível de situações. Estava, pois, interessado em descobrir as leis da Natureza, entendo por Natureza *não apenas as coisas concretas mas também os objetos matemáticos.*

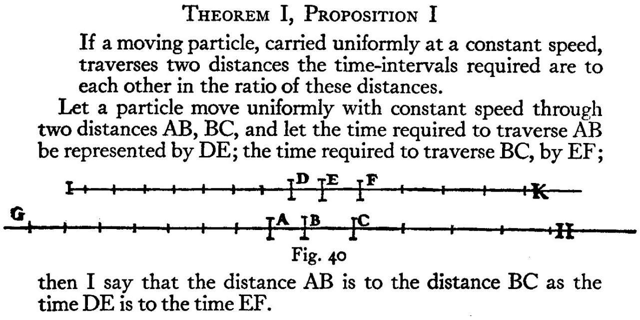
Neste artigo mostra-se o modo como Galileu inventou um modelo matemático simples para descrever um certo tipo de movimento, o "movimento naturalmente acelerado", já analisado por muitos filósofos antigos mas apenas numa perspectiva semi-quantitativa que não permitia obter regras gerais e empiricamente testáveis. E, no final, como estamos no século XXI, utiliza-se uma ferramenta computacional (Geogebra) para representar e explorar "movimentos naturalmente acelerados"...

Um dos dedos de Galileu está exposto no Museu da Ciência em Florença, Itália. Durante séculos, os mártires foram imortalizados através de relíquias, algumas um pouco macabras... Este dedo de Galileu ilustra, de certo modo, como ele foi um mártir da ciência e do pensamento moderno, livre da tutela religiosa. https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei

GALILEU PENSA UTILIZANDO GEOMETRIA, NÃO ÁLGEBRA...

Um dos aspetos interessantes do pensamento de Galileu é que ele não era capaz de fazer abordagens algébricas a quantidades proporcionais. Por exemplo, para descrever o movimento com velocidade constante, representava a distância por segmentos de reta e o tempo decorrido por outros segmentos de reta...

e em seguida estabelecia relações geométricas entre esses segmentos, como se ilustra no texto seguinte, do livro *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências*, escrito por Galileu no final da sua longa vida:



THEOREM I, PROPOSITION I

If a moving particle, carried uniformly at a constant speed, traverses two distances the time-intervals required are to each other in the ratio of these distances.

Let a particle move uniformly with constant speed through two distances AB, BC, and let the time required to traverse AB be represented by DE; the time required to traverse BC, by EF;

I D E F K

G A B C H

Fig. 40

then I say that the distance AB is to the distance BC as the time DE is to the time EF.

Para quantidades diretamente proporcionais, este tipo de abordagem é relativamente simples de utilizar. Quando não há proporcionalidade direta, como era evidente no caso de um movimento naturalmente acelerado, em que a distância percorrida está constantemente a aumentar de modo não proporcional ao tempo decorrido, a utilização de abordagens geométricas revela-se bastante mais complicada! Por isso, neste texto, vamos utilizar uma abordagem algébrica.

MOVIMENTO NATURALMENTE ACELERADO

Um exemplo de "movimento naturalmente acelerado" é o movimento de um corpo deixado cair de uma certa altura. Quando se deixa cair o corpo, a velocidade deste é nula e, à medida que o corpo cai, *parece* ir cada vez mais depressa. Que fazer para concluir se isso é verdade? Haverá alguma regra matemática que descreva esse movimento naturalmente acelerado?

Quando a velocidade é constante, é muito fácil medir a velocidade; mas, claro, primeiro é necessário definir o que é a velocidade, algo que Galileu começou evidentemente por fazer, relacionando distâncias percorridas e tempos decorridos a percorrer essas distâncias. Quando a velocidade não é constante, como *deve* ser o caso no movimento naturalmente acelerado, a velocidade não pode ser medida dividindo simplesmente a distância percorrida pelo tempo decorrido porque estas duas quantidades estão permanentemente a aumentar de modo não proporcional.

A IMPORTÂNCIA DA EXPERIMENTAÇÃO

Ao contrário de Aristóteles e dos outros filósofos antigos, Galileu pensou que era relevante fazer medições rigorosas de modo a poder confrontar ideias com dados experimentais. A tradição antiga desvalorizava a obtenção de dados experimentais e valorizava a especulação e argumentação verbal.

Mas Galileu tinha um problema para obter dados experimentais: o movimento de queda livre era muito rápido (e no tempo de Galileu não havia nem sensores, nem computadores, nem telemóveis com cronómetros que podem medir centésimas de segundo, etc., ...).

Simples, pensou Galileu: há que arranjar um movimento semelhante, mas mais lento! O movimento ao longo de um plano inclinado é semelhante à queda livre — a queda livre vertical pode ser considerada como um movimento ao longo de um plano inclinado de 90°. Logo, as regras matemáticas do movimento ao longo do plano inclinado devem ser as mesmas do movimento de queda livre.

No *Museu Galileo* (https://www.museogalileo.it, Florença, Itália) está uma reprodução aproximada do plano descrito por Galileu, tal como ilustra a seguinte figura.

Galileu descreve o plano e a experiência do seguinte modo, no livro *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências* (tradução original na versão portuguesa do curso "Projecto Física, editada pela Fundação Gulbenkian):

> "Tomou-se uma tábua de madeira, com cerca de 12 cúbitos de comprimento [aproximadamente 6 metros], meio cúbito de largura e três dedos de espessura; na sua face cortou-se um canal com pouco mais de um dedo de altura; feito o entalhe tão rectilíneo quanto é possível, liso e polido, e tendo-se revestido o mesmo com pergaminho, também tão suave e polido quanto possível, fez-se rolar ao longo dele uma esfera pesada de bronze, perfeitamente redonda e de superflcie suave. Colocado o conjunto numa posição inclinada, elevando-se uma das extremidades cerca de um ou dois cúbitos em relação à outra, fizemos rolar a bola, como dizia, ao longo do canal, anotando, da maneira que vamos descrever, o tempo necessário para a descida. A experiência foi repetida várias vezes, de modo a medir o tempo com uma precisão tal que a diferença entre os valores correspondentes a duas experiências nunca excedesse um décimo do batimento do pulso. Tendo realizado esta operação e tendo-nos assegurado da sua fiabilidade, fizemos rolar a esfera apenas um quarto do comprimento do canal; e tendo medido o tempo de descida, verificámos que era exactamente metade do primeiro. A experiência foi então repetida para outras distâncias, comparando o tempo de descida total com o de metade da descida, ou com o de dois terços, ou com o de três quartos ou, na verdade, com o

de qualquer outra fracção; em tais experiências, repetidas uma centena de vezes, verificámos sempre que os espaços percorridos estavam em relação uns com os outros tal como os quadrados dos tempos, e isto foi verdade para todas as inclinações do ... canal ao longo do qual fizemos rolar a esfera...” (p. 56)

A medição do tempo decorrido é também cuidadosamente descrita por Galileu:

> “Para a medição do tempo, utilizámos um grande reservatório de água, colocado numa posição elevada; no fundo deste reservatório estava soldado um tubo de pequeno diâmetro que fornecia um fino jato de água, que recolhemos numa pequena taça durante o tempo de cada descida, fosse para todo o comprimento do canal, fosse para qualquer fração dele; a água assim recolhida era pesada numa balança muito precisa; as diferenças e os quocientes destes pesos davam-nos as diferenças e os quocientes dos intervalos de tempo, e isto com uma precisão tal que, embora a operação fosse repetida muitas e muitas vezes, não houve qualquer discrepância apreciável nos resultados.” (p. 59)

Galileu nunca publicou os valores medidos nas diversas experiências. Alguns historiadores acreditavam que Galileu tinha “embelezado” os dados para evidenciar um modelo matemático “certinho” mas, na década de 1970, um historiador descobriu por acaso um manuscrito do espólio de Galileu onde estavam os registos originais.

George Johnson (*The Ten Most Beautiful Experiments*, 2008), apresenta esses valores:

“ticks” (tempo decorrido)	*punti* (distância percorrida)
1	33
2	130
3	298
4	526
5	824
6	1192
7	1620
8	2104

Que significado têm estes valores? À primeira vista, não parece haver qualquer regularidade...

Depois de uma análise cuidadosa, Galileu anotou que:

– 130 *punti* (a distância percorrida ao fim de 2 unidades de tempo) é aproximadamente 4 vezes a distância percorrida numa unidade de tempo (33 *punti*);

– 298 *punti* (a distância percorrida ao fim de 3 unidades de tempo) é aproximadamente 9 vezes a distância percorrida numa unidade de tempo (33 *punti*);

– 526 *punti* (a distância percorrida ao fim de 4 unidades de tempo) é aproximadamente 16 vezes a distância percorrida numa unidade de tempo (33 *punti*);

– 824 *punti* (a distância percorrida ao fim de 5 unidades de tempo) é aproximadamente 25 vezes a distância percorrida numa unidade de tempo (33 *punti*);

Eureka! A regra metamática é, afinal, bem simples:

– Quando o tempo decorrido duplica, a distância percorrida aumenta $4 = 2^2$ vezes;

– Quando o tempo decorrido triplica, a distância percorrida aumenta $9 = 3^2$ vezes;

– Quando o tempo decorrido quadriplica, a distância percorrida aumenta $16 = 4^2$ vezes;

– Quando o tempo decorrido quintuplica, a distância percorrida aumenta $25 = 5^2$ vezes;

Ou seja, reformulando a tabela anterior e representando por t o tempo decorrido para percorrer a distância d:

t	t^2	d	d / t^2
1	1	33	33
2	4	130	33
3	9	298	33
4	16	526	33
5	25	824	33
6	36	1192	33
7	49	1620	33
8	64	2104	33

A proporcionalidade direta entre a distância percorrida e o tempo decorrido pode ser representada do seguinte modo:

$$\frac{d}{t^2} = 33$$

Nesta equação, d está em *punti*, uma unidade de distância, t está em “ticks”, uma unidade de tempo, e 33 está, evidentemente em *punti*/ticks^2. O valor desta constante de proporcionalidade depende, naturalmente, da inclinação do plano: quanto mais inclinado estiver, maior será o seu valor.

Mas que significado tem este valor?

Empiricamente não era possível ir mais além. Galileu *sentia* que era necessário introduzir novas ideias para descobrir o significado daquela relação, tão bem descrita pelo poeta e professor António Gedeão no seu *Poema para Galileu,* :

(...)
Por isso estoicamente, mansamente,
resististe a todas as torturas,
a todas as angústias, a todos os contratempos,
enquanto eles, do alto incessível das suas alturas,
foram caindo,
caindo,
caindo,
caindo,
caindo sempre,

e sempre,
ininterruptamente,
na razão directa do quadrado dos tempos.

[http://www.citi.pt/cultura/literatura/poesia/antonio_gedeao/galileu.html)

A IMPORTÂNCIA DA "TEORIA"...

Galileu demorou quatro anos a descobrir o significado da relação experimental que obteve para descrever o movimento naturalmente acelerado. Depois de alguns erros e hesitações (a velocidade aumentava à medida que a distância percorrida e o tempo decorrido aumentava... — seria a velocidade que a esfera atingia proporcional à distância percorrida ou ao tempo decorrido...?), Galileu colocou a hipótese seguinte: a velocidade da esfera ao fim do tempo *t* era diretamente proporcional ao tempo decorrido *t* até atingir essa velocidade:

$$\frac{v}{t} = \text{constante}$$

Se o movimento for "continuamente acelerado", a velocidade *v* ao fim do tempo *t* é dada por:

$$v = \text{constante} \times t$$

Esta "constante" representa, pois, a taxa de variação da velocidade. Galileu designou esta nova quantidade por aceleração, que vamos representar por *a*. [Em rigor, velocidade e aceleração são quantidades vetoriais e nestas equações estamos apenas a representar a magnitude dessas quantidades vetoriais].

Assim, tem-se:

$$v = a \times t$$

A unidade de aceleração, se *v* for expressa em *punti*/ticks e *t* em ticks, é:

$$\frac{\dfrac{punti}{ticks}}{ticks} = \text{unidades de aceleração}$$

Ou seja:

$$\frac{punti}{ticks^2} = \text{unidades de aceleração}$$

Mas estas unidades são as mesmas unidades daquela constante empírica que Galileu tinha obtido no movimento ao longo do plano inclinado (33 *punti*/ticks^2)! Seria que esse valor era simplesmente a aceleração da esfera ao longo do plano inclinado...?

Desde o século XIV que era conhecida uma importante regra matemática, que Galileu vai utilizar para obter o significado daquela constante: a chamada "regra de Merton" segundo a qual o valor médio de uma quantidade que varie de modo uniforme pode ser calculado como a média do valor inicial e do valor final.

Assim, o valor médio da velocidade da esfera ao longo do plano inclinado pode ser calculado como a média da velocidade no final e a velocidade no início:

$$v_{\text{média}} = \frac{v_{\text{final}} + v_{\text{inicial}}}{2}$$

Como a esfera inicia o movimento a partir do repouso, a velocidade inicial é nula. Logo:

$$v_{\text{média}} = \frac{v_{\text{final}}}{2}$$

Mas, por outro lado, o valor médio da velocidade também pode ser calculado conhecendo a distância percorrida *d* e o tempo gasto *t*:

$$v_{\text{média}} = \frac{d}{t}$$

Ou seja, há dois processos diferentes de calcular a velocidade média ao longo do plano inclinado. Assim, podemos escrever:

$$\frac{v_{\text{final}}}{2} = \frac{d}{t}$$

Mas já vimos que a velocidade de um objeto com aceleração *a*, ao fim do tempo *t*, é

$$v_{\text{final}} = a \times t$$

Substituindo esta equação na anterior, obtém-se:

$$\frac{a \times t}{2} = \frac{d}{t}$$

Rearranjando, vem:

$$\frac{a}{2} = \frac{d}{t^2}$$

Está resolvido o mistério da constante obtida experimentalmente! Afinal não pode ser o valor da aceleração mas sim metade desse valor.

Exprimindo a distância percorrida *d* como variável dependente, tem-se:

$$d = \frac{1}{2} a t^2$$

Este é, pois, o modelo matemático do "movimento naturalmente acelerado" ao longo do plano inclinado e, claro, do movimento de queda livre. Em unidades modernas, no Sistema Internacional de Unidades, *t* exprime-se em segundos, *a* em metros por segundo, por segundo, e *d* em metros (o coefiente 1/2 não tem unidades):

$$\begin{aligned} \text{m} &= \frac{\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} \times \text{s}^2 \\ &= \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \text{s}^2 \\ &= \text{m} \end{aligned}$$

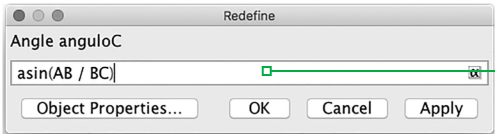
UM MODELO EM GEOGEBRA

É relativamente fácil construir um modelo em Geogebra do movimento num plano inclinado, como se exemplifica no exemplo ao lado.

A distância percorrida d é função do tempo decorrido t. Todas as grandezas estão representadas em unidades do Sistema Internacional.

A aceleração ao longo do plano é uma fração da aceleração da gravidade, 10 m/s em cada s. As coordenadas da esfera são calculadas tendo em conta a distância percorrida d e o facto da esfera partir do ponto B. Na sequência de imagens, pode verificar-se que duplicando o tempo decorrido (de 0,2 para 0,4 unidades), a distância percorrida quadriplica, tal como Galileu descobriu.

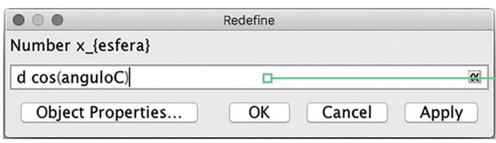
Cálculo do ângulo que o plano faz com a horizontal.



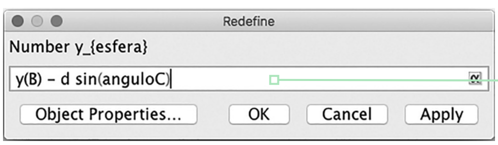
Cálculo da magnitude da aceleração ao longo plano.

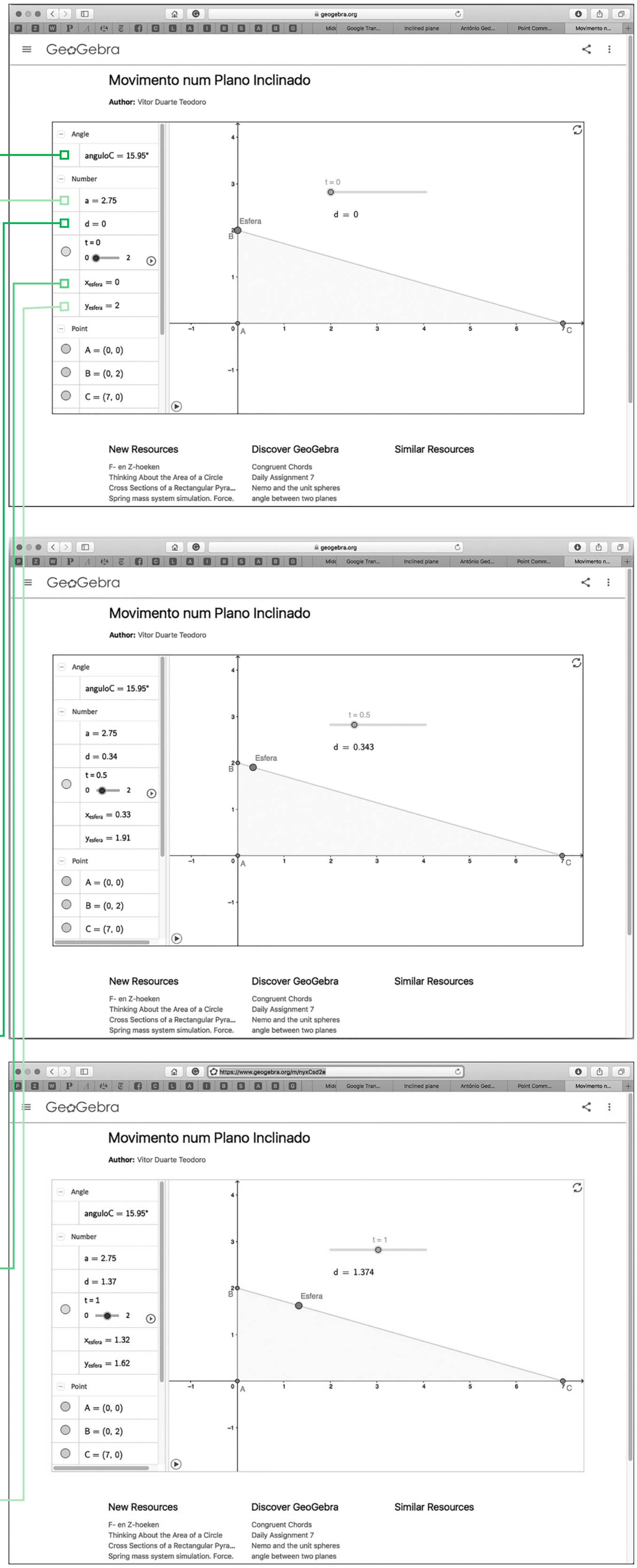
Cálculo da distância percorrida em função do tempo decorrido t.

Cálculo da coordenada horizontal da esfera, no referencial da figura.



Cálculo da coordenada vertical da esfera, no referencial da figura.





(https://www.geogebra.org/m/nyxCsd2e)

Vitor Duarte Teodoro
Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNL