A aprendizagem da resolução das equações do 1.º grau – uma abordagem com balanças

O 3.º ciclo contempla a aprendizagem de vários métodos formais algébricos. Estes métodos constituem um marco no progresso na aprendizagem e a sua utilização permite aos alunos resolver vários problemas, levando-os rapidamente à solução e libertando-os de procurar estratégias alternativas. No entanto, a passagem dos métodos informais aos formais não é fácil para a maioria dos alunos. Muitas das vezes, as dificuldades que surgem com a aplicação dos métodos formais podem estar relacionadas com o ritmo a que os tópicos são estudados, bem como à abordagem predominantemente formal com que são apresentados (Herscovics & Lincheviski, 1994). Assim, é importante envolver os alunos em experiências informais antes da manipulação algébrica formal de modo a que os métodos façam sentido. Os alunos devem ser envolvidos em experiências com múltiplas representações para que possam fazer conexões entre elas e os símbolos surjam de forma natural.

No 7.º ano está prevista a aprendizagem de resolução de equações do 1.º grau. No estudo deste conteúdo os alunos devem compreender o conceito de equação, reconhecendo o sinal de igual como uma relação entre quantidades e não como um símbolo que implica um cálculo. Por outro lado, devem aprender a resolver equações com fluência e aplicar este conhecimento na resolução de problemas.

Muitos alunos preferem frequentemente recorrer a métodos aritméticos, mostrando dificuldade na utilização de equações (Kieran, 2006). Embora à primeira vista o pensamento aritmético possa parecer um obstáculo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, ele também pode ser visto como uma via para esse desenvolvimento. Entre os processos aritméticos mais utilizados destacam-se as estratégias de tentativa e erro que consistem em atribuir um valor a uma quantidade desconhecida e verificar a sua exatidão, usando um raciocínio funcional, isto é, reconhecendo a relação existente entre as variáveis, mesmo que essa relação não seja expressa através de linguagem algébrica formal.

No trabalho com as equações, os alunos podem até perceber aquelas do tipo $ax+b=c$, mas têm muitas dificuldades em perceber equações quando a incógnita surge nos dois membros (Kieran, 1981). Este tipo de equações, inicialmente, deve também ser estudado informalmente, recorrendo a situações em contextos que não sejam puramente matemáticos e que façam sentido para os alunos.

Existem várias abordagens distintas para o estudo das equações, cabe ao professor selecionar aquelas que considera mais adequadas às caraterísticas dos seus alunos. Uma das possibilidades é o recurso a balanças. Ponte, Branco e Matos (2009) consideram que:

> a situação das balanças em equilíbrio ajuda a desenvolver essa compreensão e a promover o surgimento de estratégias informais para a resolução de equações que os alunos devem conseguir justificar. Muitas vezes, essas estratégias permitem estabelecer relações com a representação da situação em linguagem algébrica e com os princípios de equivalência. (p. 11)

Neste artigo analiso as representações matemáticas utilizadas na resolução de uma tarefa introdutória ao estudo das equações que envolve balanças. É importante perceber como é que os alunos expressam as suas ideias matemáticas e como evoluem na aprendizagem de métodos formais, num contexto de trabalho baseado em experiências informais.

Descrevo o trabalho desenvolvido numa turma do 7.º ano constituída por 18 alunos, entre os 12 e 15 anos. Os alunos desta turma manifestam algumas dificuldades de aprendizagem, dois deles têm necessidades educativas especiais e cinco apresentam mais de duas retenções. Anteriormente os alunos já tinham estudado sequências, onde surgiu o conceito de variável na escrita das expressões geradoras. Posteriormente estudaram as expressões algébricas e a sua simplificação. Antes da introdução do conceito de equação já tinham alguma fluência na escrita e simplificação de expressões algébricas.

No estudo das equações do 1.º grau os alunos devem entender o conceito "equação", saber escrever equações em contextos diversos, aprender a linguagem das equações (membros, termos, incógnita e solução) e resolver equações de diferentes tipologias.

A TAREFA – BALANÇAS EM EQUILÍBRIO

A tarefa é composta por cinco situações distintas, onde os alunos são desafiados a descobrir o valor de cada animal. Cada situação tem como propósito o trabalho com uma diferente tipologia de equação. As propostas estão organizadas de acordo com a sua complexidade (crescente). Antes da entrega da tarefa questionei os alunos acerca do conhecimento das balanças com dois pratos. Todos eles afirmaram já ter visto "os pesos num prato e a fruta no outro… até ficar certinho". Os alunos resolveram a tarefa de forma autónoma e posteriormente demos início à apresentação e discussão de processos de resolução. Para cada situação foram promovidos momentos de discussão e de síntese, estabelecendo uma ponte entre as produções dos alunos e o simbolismo algébrico.

Equações do tipo: $x+a=b$

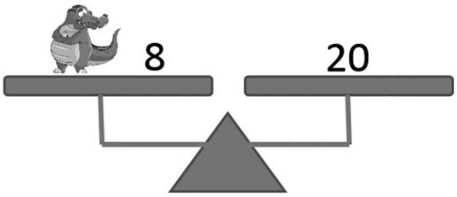


Figura 1. 1.ª situação

Se num prato da balança esta 20kg e no outro está 8kg mais um dragão quer dizer que cada dragão pesa 12 kg.	Crocodilo=12kg+8=20kg	20 − 8 = (12)
Tipo 1 -1 aluno	Tipo 2 - 1 aluno	Tipo 3 - 16 alunos

Figura 2. Diferentes tipologias de respostas para a 1.ª situação

Todos os alunos da turma conseguiram facilmente responder que o valor desconhecido é 12, tendo surgido três tipologias de resposta. Um aluno apresenta uma explicação em linguagem natural sem explicitar com clareza qual foi a sua estratégia, outro aluno por tentativas, conforme explica na apresentação, verifica que 12 é o valor desconhecido. Os restantes alunos recorrem à subtração – operação inversa da adição.

Na discussão desta situação questionei os alunos acerca da condição que poderia ser escrita e da forma como pode ser obtido o valor desconhecido, ao que os alunos responderam sem dificuldade a equação que deveria ser escrita bem como o cálculo que poderia ser feito para obter a resposta. Procedi ao registo, no quadro, daquilo que os alunos disseram e expliquei-lhes a utilização do princípio de equivalência da adição para esta situação, escrevendo ao lado, conforme apresento na figura 3.

$$x+8=20 \qquad \boxed{x+8-8=20-8}$$
$$x=20-8$$
$$x=12$$

Figura 3. Resolução de equação do tipo $x+a=b$

O recurso à operação inversa surge de forma intuitiva e é um processo informal que coincide com aquilo que usualmente se faz na prática. Na realidade a maior parte das respostas dos alunos vai ao encontro dos procedimentos habituais que resultam da aplicação do princípio de equivalência da adição.

Após esta discussão explico aos alunos, tendo como suporte esta primeira situação, que a condição escrita é uma equação e esclareço ainda o significado dos termos "incógnita", "termo", "membro" e "solução". Proponho de seguida a resolução de outras equações deste tipo, $x+a=b$, com diferentes números positivos e negativos, levando-os à generalização (princípio de equivalência da adição). Para além disso explico ainda aos alunos a necessidade da utilização do sinal de equivalência entre cada passo na resolução das equações.

Equações do tipo: $ax=b$

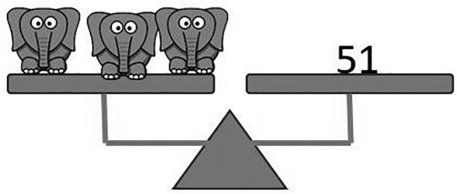


Figura 4. 2.ª situação

Se num prato da balança está 51kg e no outro está 3 elefantes quer dizer que cada elefante pesa 17kg	Cada elefante=17×3=51	51 : 3 = 17
Tipo 1 – 1 aluno	Tipo 2 – 1 aluno	Tipo 3 – 16 alunos

Figura 5. Diferentes tipologias de respostas para a 2.ª situação

Mais uma vez todos os alunos apresentaram facilidade em determinar o valor desconhecido, 17. À semelhança da primeira situação surgiram igualmente três tipologias de resposta. A maior parte dos alunos recorre à divisão. O recurso à operação inversa da multiplicação surge de forma intuitiva e é um processo informal que coincide com aquilo que usualmente se faz na prática, através da utilização do princípio de equivalência da multiplicação. Questionei os alunos acerca da equação que escreveriam bem como acerca dos procedimentos e facilmente responderam corretamente "temos de dividir", desta vez utilizando já os termos "equação", "incógnita", "membro" e "solução". Tal como na situação anterior expliquei e anotei ao lado o recurso ao princípio de equivalência da multiplicação para este caso, como apresento na figura 6.

$$3x=51 \Leftrightarrow \qquad \boxed{\frac{3x}{3}=\frac{51}{3}}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{51}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=17 \qquad c.s=\{17\}$$

Figura 6. Resolução de equação do tipo $ax=b$

Os alunos resolveram depois outras equações do tipo *ax=b* também com valores negativos tanto para *a* como para *b*, ganhando fluência na aplicação do princípio de equivalência da multiplicação.

Equações do tipo: $ax+b=c$

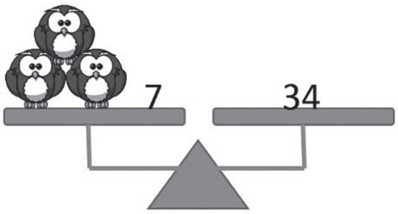


Figura 7. 3.ª situação

Tipo 1 – 1 aluno	Tipo 2 – 13 alunos
34-7=27 Cada coruja=9x3=27	34-7=27 27 |3 9 9Kg/cada

Figura 8. Diferentes tipologias de respostas para a 3.ª situação

Nem todos os alunos conseguiram responder a esta situação que já envolve a utilização dos dois princípios de equivalência. Dos 14 alunos que conseguiram responder, 13 recorrem às operações inversas que equivalem à aplicação dos princípios de equivalência da adição e da multiplicação. Apenas um dos alunos utiliza inicialmente um raciocínio que equivale à aplicação do princípio de equivalência da adição, mas de seguida recorre a outro tipo de procedimento para obter o valor desconhecido (tipo 1). À semelhança das situações anteriores, os alunos traduziram para uma equação a situação apresentada bem como os procedimentos a efetuar, como mostro na figura 9.

$$3x+7=34 \Leftrightarrow \qquad \boxed{3x+7-7=34-7}$$
$$\Leftrightarrow 3x=34-7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x=27 \Leftrightarrow \qquad \boxed{\frac{3x}{3}=\frac{27}{3}}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{27}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=9 \quad c.s=\{9\}$$

Figura 9. Resolução de equação do tipo $ax+b=c$

A resolução desta situação foi muito importante por coincidir com o estudo de uma equação do tipo $ax+b=c$ que envolve a aplicação dos dois princípios de equivalência, de forma ordenada. Os alunos, de um modo geral, compreenderam que primeiramente é necessário recorrer ao princípio de equivalência da adição e só posteriormente ao princípio de equivalência da multiplicação.

Equações do tipo: $ax+c=bx+d$

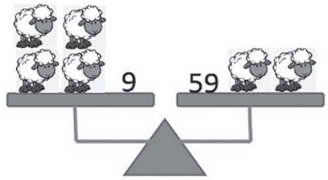
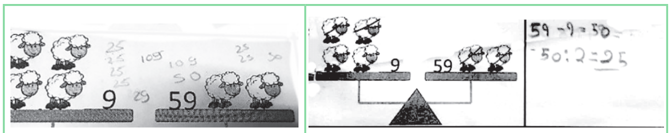


Figura 10. 4.ª situação



Tipo 1– 9 alunos	Tipo 2 – 2 alunos

Figura 11. Diferentes tipologias de respostas para a 4.ª situação

A quarta situação, mais complexa do que a anterior, por envolver o valor desconhecido nos dois pratos da balança, levou a que sete alunos não respondessem e muitos dos outros tenham recorrido à tentativa e erro para descobrirem o valor em falta, como apresento na figura 11, tipo 1. Na discussão tento também que os alunos que apresentam resoluções do tipo 2 expliquem como pensaram.

> **Aluno A**: Posso tirar duas ovelhas de cada prato que a balança continua em equilíbrio… depois já está!

Esta situação foi depois traduzida, com a colaboração dos alunos, pela equação e respetivo processo de resolução, ao qual acrescento ao lado o recurso aos princípios de equivalência, como apresento na figura 12.

$$4x+9=2x+59 \Leftrightarrow \qquad \boxed{4x-2x+9=2x-2x+59}$$
$$\Leftrightarrow 2x+9=59 \Leftrightarrow \qquad \boxed{2x+9-9=59-9}$$
$$\Leftrightarrow 2x=50 \Leftrightarrow \qquad \boxed{\frac{2x}{2}=\frac{50}{2}}$$
$$\Leftrightarrow x=25$$
$$c.s=\{25\}$$

Figura 12. Resolução de equação do tipo $ax+c=bx+d$

Neste caso os alunos começam por usar duas vezes o princípio de equivalência da adição e só posteriormente o princípio de equivalência da multiplicação. Os alunos resolveram depois várias equações deste tipo, $ax+c=bx+d$.

Por fim, foi discutida a última situação.

Equações do tipo: $a(bx+c)=dx+e$

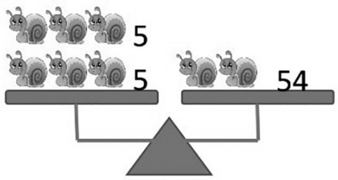
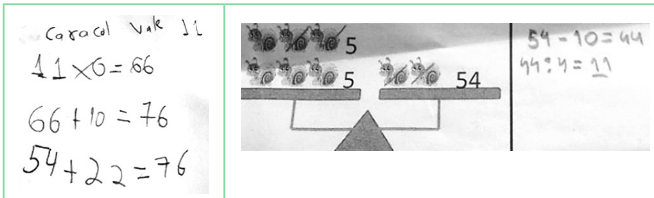


Figura 13. 5.ª situação



Tipo 1 – 7 alunos | Tipo 2 – 2 alunos

Figura 14. Diferentes tipologias de respostas para a 5.ª situação

Nesta situação nove alunos não responderam. Sete alunos responderam recorrendo à tentativa e erro e apenas dois alunos, como na 4.ª situação, recorreram às operações inversas.

Inicialmente, quando questionei os alunos acerca da equação que poderiam escrever, todos me responderam $6x+10=2x+54$. Questionei-os também acerca dos procedimentos que deveríamos fazer para a resolver e todos foram respondendo corretamente. Seguidamente questionei-os acerca do facto de poder existir eventualmente outra forma de escrever a equação:

> **Professora**- Não haverá outra forma de escrever a equação? Olhem bem para o primeiro prato da balança…
>
> **Aluno B**- São duas filas iguais (referindo-se aos 3 caracóis e ao número 5) …
>
> **Professora**- Então o que poderemos utilizar?
>
> **Aluno C**- Parêntesis!

Questiono então os alunos acerca da utilização dos parêntesis ao que alguns me respondem de imediato que a equação seria $2(3x+5)=2x+54$. Peço ainda que me expliquem como ficaria a equação após desembaraçar de parêntesis, o que leva os alunos a perceberem que obteriam $6x+10=2x+54$ – a mesma equação anteriormente escrita.

Os alunos a partir da resolução desta última situação resolveram depois outras equações e problemas que os levaram a uma compreensão mais ampla do conceito de equação e dos métodos algébricos associados à sua resolução.

A CONCLUIR

No processo de aprendizagem é importante incentivar os alunos a representar as suas ideias matemáticas de forma que façam sentido para eles, mesmo que essas representações não sejam convencionais. No entanto, é igualmente importante que os alunos aprendam as formas estabelecidas de representação que servem de base à atividade matemática e à comunicação das ideias matemáticas.

O recurso a estas diferentes situações de complexidade crescente, envolvendo balanças, pode ser um bom veículo para estimular o uso de representações informais que se revelaram importantes na aprendizagem formal da resolução de equações. Embora nem todos tenham conseguido resolver todas as situações propostas, os alunos recorreram ao uso de processos aritméticos como conhecimento de factos numéricos, a tentativa e erro ou às operações inversas que foram essenciais para a compreensão de representações formais. Ao longo da discussão das diferentes situações verifico que os alunos evoluíram na compreensão do conceito de equação, bem como na linguagem associada a este conceito. Para além disso, os alunos aprenderam a resolver equações a partir das suas estratégias informais e foram ganhando fluência na sua resolução. A notação algébrica, bem como os procedimentos usuais que têm subjacentes a aplicação dos princípios de equivalência, surgiram naturalmente nas suas produções. Esta prática revelou-se facilitadora na transição para um pensamento mais abstrato, necessário para desenvolver uma compreensão mais profunda e completa de um procedimento matemático tendo por base o conhecimento conceptual apoiado em representações intuitivas e informais.

Referências

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59–78.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (2006) Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-50). Roterdham: Sense.

Ponte, J.P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Sandra Nobre

Agrupamento de escolas Professor Paula Nogueira - Olhão