

# O PROBLEMA DO PROFMAT 2018

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2018, em Almada, consistiu na resolução do problema “Matrículas bem diferentes”:

*Na Sildávia, as matrículas dos automóveis têm seis algarismos. Para evitar confusões, as autoridades decidiram que as matrículas têm de diferir em pelo menos dois símbolos. Por exemplo, se a um automóvel for atribuído a matrícula 979017, já não pode existir outra com o número 975017. No entanto, já é possível o número 970917 porque difere em dois algarismos.*

*No máximo, quantas matrículas podem existir na Sildávia?*

*Na Roldávia, as matrículas são constituídas por dois algarismos, duas letras e mais dois algarismos. Também neste país as matrículas têm de diferir em pelo menos dois símbolos. Se houver um carro com 55-FG-62, não podem existir as matrículas 55-FG-82 nem 55-HG-62, mas seriam aceites as 55-GF-62 e 54-FF-62.*

*O alfabeto da Roldávia tem 26 letras. No máximo, quantas matrículas são possíveis?*

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Infelizmente, apenas recebemos uma resposta, da sempre entusiasta Letícia Martins (Guimarães). O que terá afastado os concorrentes? Várias hipóteses se podem colocar:

- O problema era difícil?
- O desafio não era suficientemente atrativo?
- O programa do ProfMat não deixava momentos para se pensar calmamente na resolução?

## 1. Matrículas da Sildávia

Uma maneira de resolver o problema é começar com casos mais simples, ou seja, com matrículas de menos algarismos e tentar descobrir se existe algum padrão.

Se as matrículas tivessem apenas um algarismo, só haveria uma matrícula possível.

Com matrículas de dois algarismos, conseguiam-se dez matrículas. Por exemplo, 00, 11, 22, 33, ..., 99.

Para três algarismos, chegávamos às cem matrículas, dez por cada centena. As começadas por 0 poderiam ser obtidas das anteriores (000, 011, 022, ..., 099). Para as começadas por 1, avançaríamos o último algarismo de uma unidade (101, 112, 123, ..., 190). Para as começadas por 2 avançaríamos duas unidades

(202, 213, 224, ..., 291), e assim sucessivamente. Obteríamos 100 matrículas.

E continuaríamos desta forma até aos seis algarismos.

Contudo, podemos pensar numa estratégia mais simples. Os primeiros cinco algarismos poderiam ser quaisquer, de 00000 a 99999, num total de cem mil possibilidades. O último algarismo será o que introduzirá a segunda diferença (aquilo a que poderemos chamar um algarismo de controlo). A forma mais fácil é somar os cinco algarismos e atribuir ao sexto algarismo o algarismo das unidades dessa soma. Por exemplo, se a matrícula se iniciar por 98917, temos  $9+8+9+1+7 = 34$ , logo a matrícula será 989174.

Desta forma, se alterarmos apenas um algarismo dos cinco iniciais, o último também será diferente. Mais alguns casos admissíveis: 010203, 575120, 999995.

Conclusão na Sildávia conseguem-se 100 000 matrículas diferentes.

## 2. Matrículas da Roldávia

Neste “país”, a situação é um pouco mais complexa devido à existência de letras mas vamos seguir uma estratégia semelhante à anterior. A cada letra atribuímos um valor, de A=1 a Z=26. Só que agora o símbolo de controlo não pode ser um algarismo, tem de ser uma letra.

Assim sendo, os quatro algarismos e a primeira letra podem ser quaisquer. Para se obter a segunda letra, somam-se os valores dos cinco elementos anteriores e, se necessário, subtrai-se sucessivamente 26 até se obter um número entre 1 e 26. Esse número indica-nos qual será a segunda letra.

Por exemplo, partindo de 79-V?-88, e como V=22, temos  $7+9+22+8+8 = 54$ ;  $54-26=28$ ;  $28-26=2$ . Como B=2, a matrícula será 79-VB-88.

Outras matrículas possíveis: 64-AZ-78, 00-BD-20, 11-CG-11.

Na Roldávia podem ser atribuídas  $10000 \times 26 = 260\ 000$  matrículas.

## Prémios

Como a única resposta entregue não cumpriu os critérios de classificação, este ano não há primeiro prémio, apenas o segundo: Letícia Martins – Livro “*Problemas... Sem Problema*”, J. P. Viana, ed. APM