

Ângulos externos de um polígono e voltas completas

ALGUMAS IDEIAS SOBRE O CONCEITO DE ÂNGULO EXTERNO

O conceito de ângulo externo de um polígono não é muito valorizado e penso até que lhe é dada muito pouca atenção. No entanto, este elemento de um polígono pode ser muito significativo e ajudar a ampliar o conceito de ângulo.

Os ângulos externos de um polígono levam-nos a encarar uma forma de percorrer o polígono por fora. Isto é, partindo de um vértice qualquer de um polígono, percorrendo a linha poligonal que o define, a sua fronteira, de forma a manter sempre a mesma maneira de virar ao chegar a outro vértice, quando chegarmos ao vértice do qual partimos demos uma volta completa, ou seja, rodámos 360° .

Aprendi esta propriedade há muitos anos quando alguém me proporcionou a experiência de percorrer, no verdadeiro sentido da expressão, a fronteira de um polígono desenhado no chão. Esta experiência pode ser feita com crianças desde muito cedo e é realmente marcante. Andamos, paramos em cada vértice e vamos rodando. Seja qual for o número de lados terminamos sempre voltados para o mesmo ponto de referência de quando partimos e, durante o percurso, nunca olhámos para esse ponto de referência. Temos assim uma ideia concreta do que é dar uma volta completa.

Esta propriedade é válida para qualquer polígono seja qual for o número de lados. Uma outra forma de exprimir esta propriedade é afirmar que a soma dos ângulos externos de um polígono qualquer é um ângulo de volta completa, um ângulo giro ou um ângulo de 360° .

A ideia que apresentamos tem subjacente o conceito de ângulo externo encarado como uma grandeza, neste caso associada à medida da rotação definida pelo prolongamento de um lado e pelo lado consecutivo (figura 1).

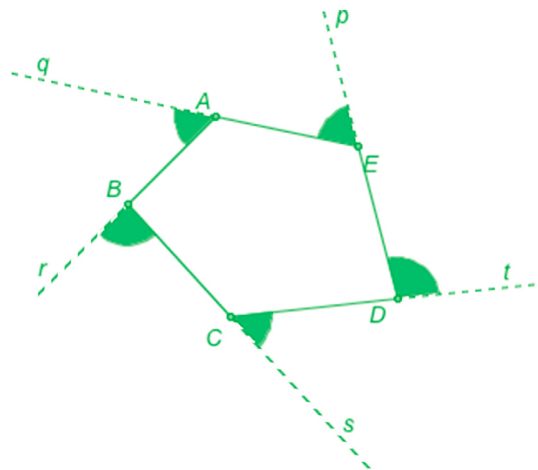


Figura 1

É importante registar que esta marcação de ângulos obedece à regra de que, num dado polígono, todos os prolongamentos dos lados sejam feitos com igual orientação e que, num polígono convexo, um ângulo externo é suplementar do ângulo interno adjacente.

Destaco nesta discussão que se adota o conceito de ângulo como grandeza e não como figura, seguindo a orientação desenvolvida por Stella Baruk. Este conceito é amplamente discutido no Dicionário de Matemática Elementar desta autora. Aliás esta orientação de ângulo como grandeza é a mais correta do ponto de vista formal.

UM EPISÓDIO DE SALA DE AULA

O que acabamos de dizer é fácil de compreender e aceitar num polígono convexo. O que se passará com um polígono côncavo? O que será um ângulo externo num polígono côncavo?

Esta questão surgiu numa turma de 5.º ano e registo o comentário da professora.

“A questão foi-me colocada por um aluno do 5.º ano! Foi um episódio delicioso em que eu fiquei ‘aflita’. Quando o aluno me colocou a questão, a minha resposta foi que o ângulo alfa (a

na figura 2) era o quarto ângulo externo, mas apenas o fiz por uma questão de lógica e coerência com o que estávamos a fazer com os polígonos convexos. Ficámos os dois a olhar para o desenho, por razões diferentes. Ele porque o facto de um ângulo externo estar no interior lhe causava compreensiva estranheza, eu porque a definição assente no facto de um ângulo externo ser suplementar ao ângulo interno adjacente, cair por terra. Fiquei caladinha e tivemos de sair da sala, 'graças a Deus'. Ambos saímos de sobrolho franzido! Nem um nem outro estávamos convencidos.”

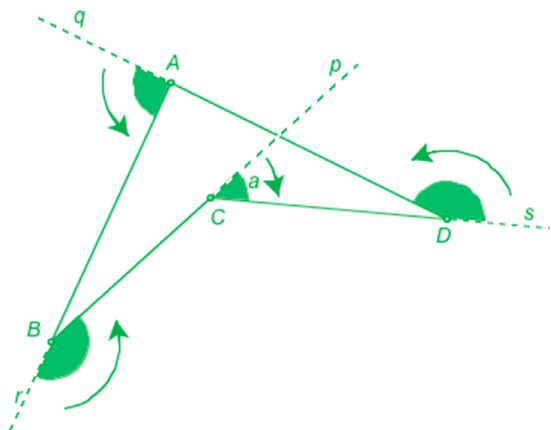


Figura 2

A professora, ciente da importância da conservação de propriedades quando se amplia um conceito, decidi experimentar o que acontecia à soma dos ângulos externos com este ângulo externo “metido para dentro”. Conclui que se a medida do ângulo neste caso fosse negativa se mantinha a propriedade da soma igual a 360° . Como fez as experiências num programa de geometria dinâmica concluiu que a propriedade era válida para qualquer polígono côncavo, com qualquer número de lados. Assim, na discussão posterior com o aluno assumiu que o ângulo externo é obtido da mesma maneira e que, nesta situação de reentrância, a sua medida é negativa. Penso que a figura 3 ilustra muito bem a ideia de que iniciando o percurso sobre a fronteira do pentágono côncavo a partir do ponto C, quando retornamos a este ponto temos que fazer um ângulo em sentido contrário para fazer uma volta completa.

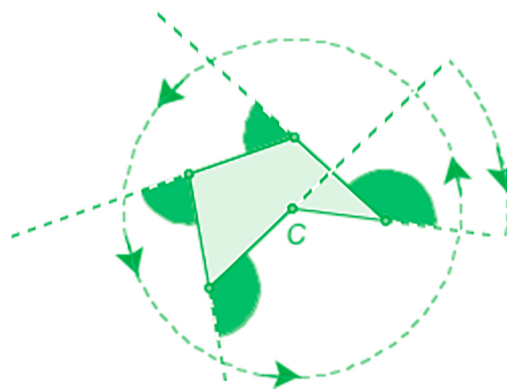


Figura 3

Segundo as palavras da professora “Claro que falar em ângulos negativos é estranho no 5.º ano....”. Porém, faz todo o sentido e aumenta a consistência tanto da propriedade da soma dos ângulos externos como da propriedade da relação entre o ângulo externo e o ângulo interno adjacente e que é a de serem suplementares.

Neste último caso, é interessante verificar que o ângulo interno é côncavo, por isso superior a um ângulo raso. Precisamente por isso, ao introduzirmos uma orientação na medição do ângulo externo adjacente, subtraímos a medida deste e concluímos que a soma dos dois é um raso e por isso são suplementares.

É muito engraçado pensar que no polígono côncavo aparece um ângulo que nos apetecia mesmo considerar como externo (figura 4). Se o fizéssemos tudo o que foi dito atrás perdia coerência. Isto é, a soma dos ângulos externos não seria um ângulo de volta completa e o ângulo externo não seria suplementar do ângulo interno adjacente.

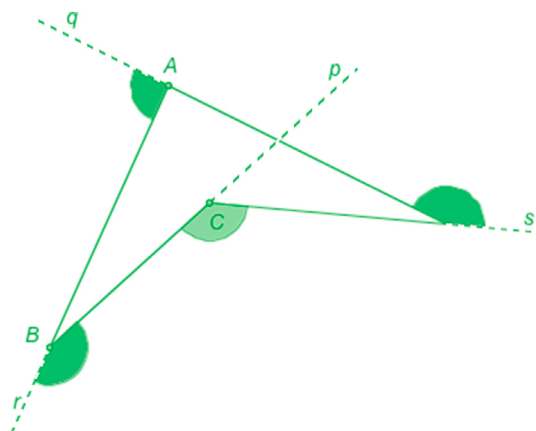


Figura 4

COMENTÁRIOS FINAIS

Não encontrei, em nenhuma das fontes credíveis que consultei, informação sobre ângulo externo de um polígono côncavo. Embora o Dicionário de Matemática Elementar de Stella Baruk seja o que se tornou mais útil para esta discussão e tenha ajudado a clarificar e sustentar o conceito de ângulo como grandeza.

As definições não são estáticas e devem ter significado. Penso que esta discussão ajuda a dar sentido à definição de ângulo externo e ajuda a dar sentido à própria definição de ângulo, que deixa de ser apenas a de uma figura obtida a partir de duas semirretas com a mesma origem, e em que ganha corpo a ideia de grandeza associada à rotação definida por essas duas semirretas. Ao acrescentar desde muito cedo a ideia de medida orientada, esta discussão vai ajudando a construir de forma consistente o conceito de ângulo, um conceito bastante complexo que progressivamente se torna mais elaborado à medida que se avança na escolaridade.

Esta discussão, pela estranheza que causa, ajuda a compreender a ambiguidade topológica do polígono côncavo. É um polígono em que a noção de interior e exterior se ampliam e que nos leva a pensar nestes dois conceitos, bem como no conceito de fronteira. Visualmente, há pontos no exterior do polígono que parecem estar no seu interior. Embora os conceitos topológicos

sejam pouco trabalhados na matemática elementar não deixa de ser interessante pensar sobre eles.

O episódio apresentado por esta professora ocorreu numa aula em que os alunos estavam a usar um programa de geometria dinâmica. Na minha opinião, este episódio reforça a ideia de que estes ambientes ajudam a proporcionar situações matematicamente mais ricas e desafiadoras, tanto aos alunos como aos professores.

Do ponto de vista da estruturação espacial e geométrica, este episódio e esta discussão parece-me muito interessante. No que respeita à estruturação espacial, os ângulos externos, encarados como elementos da figura ganham destaque de forma coerente e as relações geométricas que são estabelecidas são consistentes, evidenciando assim uma ligação entre a estruturação espacial e a estruturação geométrica.

Por tudo isto registo um agradecimento especial à professora que partilhou comigo este episódio e que de forma sábia soube construir matematicamente respostas para as dúvidas do aluno e para as suas próprias dúvidas.

Referências

Baruk, S. (2005). *Dicionário de Matemática Elementar*. Edições Afrontamento.

EIEM – ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



O **Encontro de Investigação em Educação Matemática 2018** realiza-se nos dias 17 e 18 de novembro, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra, tendo como tema a “Aula de Matemática”.

Este encontro tem como objetivos refletir sobre questões essenciais do tema escolhido para o encontro, partilhar resultados de investigação e perspetivar e/ou promover futuras investigações sobre o tema.

Como habitualmente, o programa do encontro contempla

sessões plenárias e sessões em paralelo, organizadas segundo grupos de discussão, onde serão discutidos e analisados trabalhos de investigação, concluídos ou em curso, apresentados pelos participantes através de comunicações ou posters. O prazo para submissão de propostas de trabalho a apresentar no encontro decorre até 23 de setembro.

O EIEM 2018 destina-se a todos os investigadores, formadores ou professores que se interessem pela investigação em Educação Matemática.

Mais informações disponíveis em <http://spiem.pt/>