Projecção Estereográfica

EDUARDO VELOSO

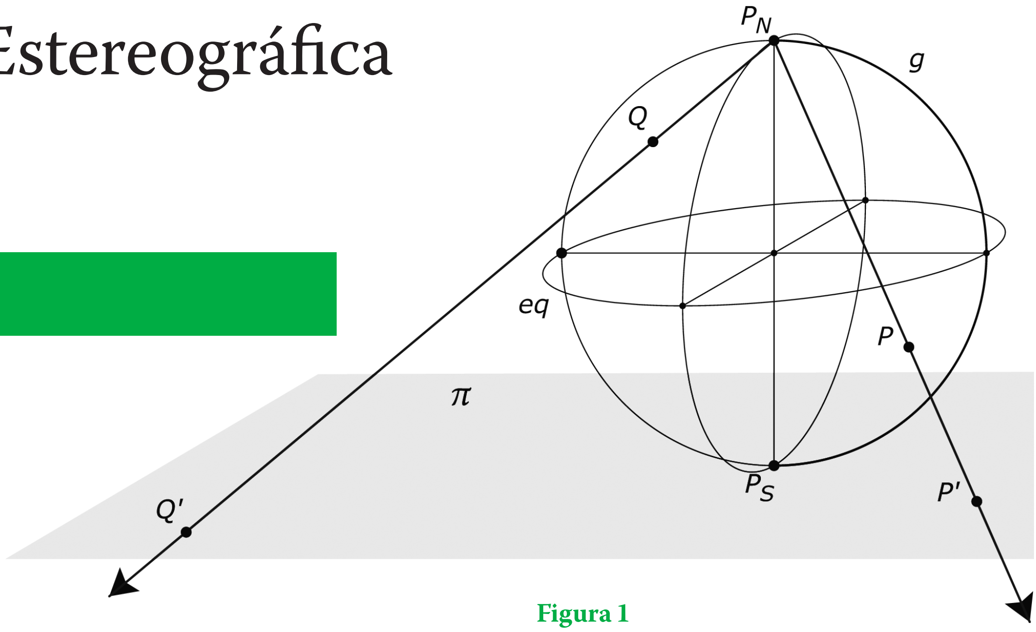

Figura 1

Este artigo é o segundo de uma série de três dizendo respeito à *linha de rumo* (mais tarde apelidada *curva loxodrómica*) de Pedro Nunes. No número anterior (146) da revista publicámos o primeiro artigo da série, intitulado *Geometria Descritiva* e *Perspectiva Cavaleira*. O presente artigo trata da projecção estereográfica, uma transformação geométrica que nos permitirá visualizar sobre a esfera terrestre a linha de rumo de um modo intuitivo e perfeitamente acessível aos alunos de matemática do ensino secundário, desde que estejam habituados a utilizar *software* de geometria dinâmica, o que nos tempos actuais deveria ser já totalmente corrente.

PROJECÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Iremos apresentar de modo breve esta transformação geométrica, mas a informação disponível *online* é imensa. Em particular, a *Associação Atractor* inclui no seu magnífico *website* informação sobre a curva loxodrómica e sobre a projecção estereográfica.[1]

Imagine uma esfera, dois pontos A e B diametralmente opostos sobre a superfície da esfera, e o plano π tangente à esfera no ponto B. A projecção estereográfica é definida em toda a superfície da esfera, com excepção do ponto A, e faz corresponder a cada ponto P a intersecção P' da semi-recta AP com o plano π.

Tendo em atenção que a esfera, nestes artigos, será sempre a esfera terrestre, tomaremos para A e B os pólos norte e sul, P_N e P_S, e π será o plano tangente à Terra no pólo sul. Assim sendo, a projecção estereográfica é a transformação geométrica P—>P', em que P é um ponto da esfera terrestre distinto de P_N e P' é a intersecção da semi-recta P_NP com o plano π (fig. 1).

A projecção estereográfica está definida em toda a superfície esférica excepto no ponto P_N. A sua inversa está definida no plano π.

O que nos propomos apresentar neste artigo são as construções a fazer para obter, a partir de um ponto P, o ponto P', e reciprocamente.

No artigo anterior, vimos como era possível obter, dada a representação da esfera em geometria descritiva, ou sejam as *vistas de cima* e *de frente*, a chamada *perspectiva cavaleira*, uma visualização mais apelativa mas na qual as propriedades das figuras estão, por assim dizer, escondidas... Por exemplo, o equador não é uma elipse, como "parece ser" na fig. 1, mas uma circunferência...

Neste artigo, iremos enunciar e resolver um conjunto de problemas de construção relativos à projecção estereográfica e à sua inversa, e resolvê-los recorrendo à representação nas *vistas* e/ou em *perspectiva cavaleira*.

Os problemas de construção são interessantes e o leitor deve tentar resolvê-los recorrendo ao programa de *geometria dinâmica* que utiliza habitualmente. No apoio *online* deste artigo[2] encontrará detalhes de todos os procedimentos utilizados e pequenos vídeos que ajudarão a compreender situações menos claras.

No terceiro artigo desta série, veremos como uma propriedade característica da projecção estereográfica e da sua inversa – o facto de conservarem os ângulos – reduz o problema de traçar uma linha de rumo sobre a esfera a encontrar a transformada, pela inversa da projecção estereográfica, de uma curva bem conhecida no plano: *a espiral equiangular* (que foi tema de um artigo anterior no número 142 da *Educação e Matemática*).

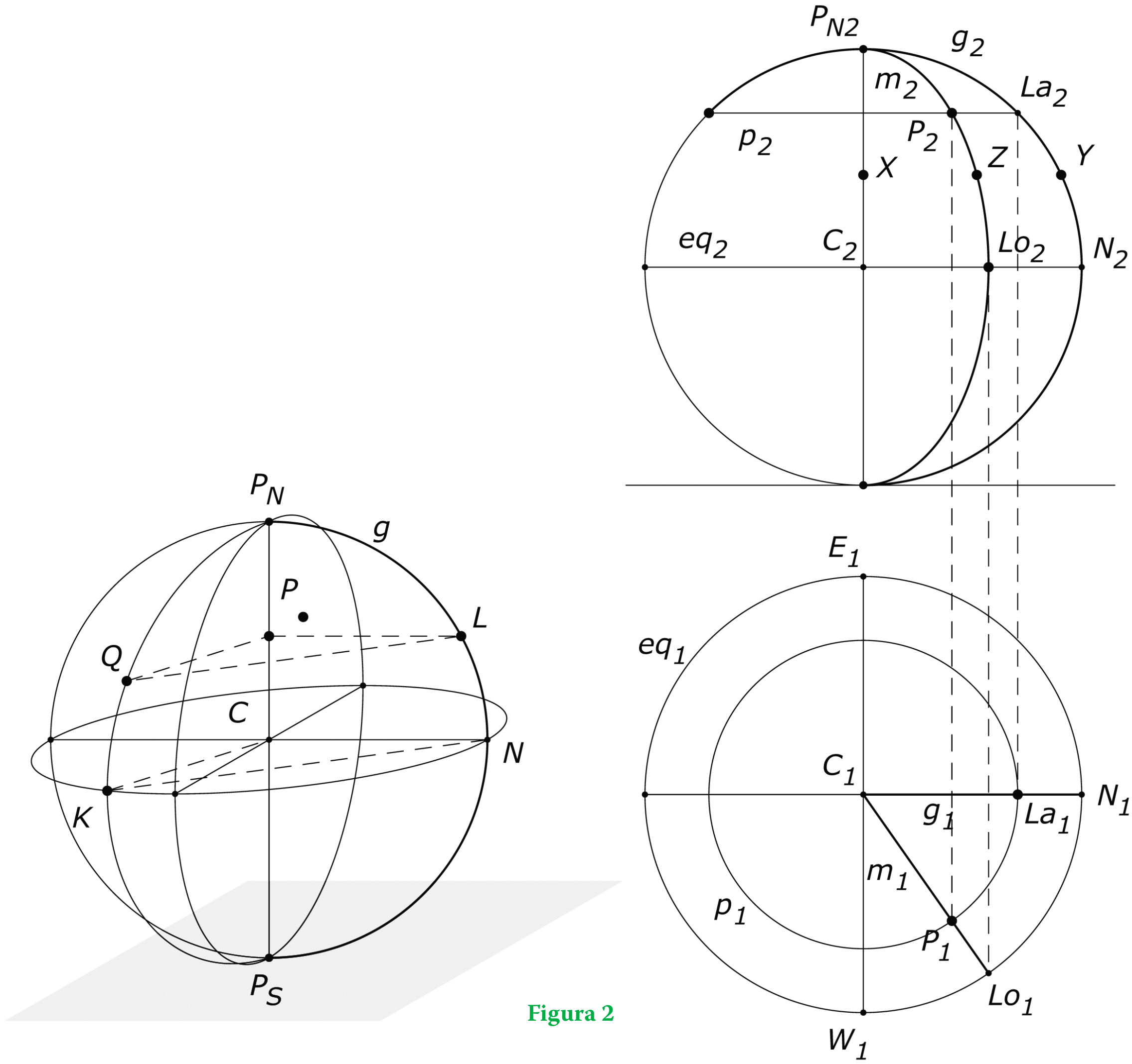

Figura 2

I. *Representar, nas vistas e na perspectiva, um ponto P dado pelas suas coordenadas geográficas* (fig. 2).

Seja P um ponto sobre a Terra com as coordenadas (*lat=45º, long=55º W*), N o ponto do meridiano de Greenwich de latitude *0* e procuremos traçar o paralelo e o meridiano onde P está situado. Seja La_2 o resultado da rotação do ponto N_2, de centro em C_2 e ângulo *+45º*, e Lo_1 o resultado da rotação do ponto N_1, de centro em C_1 e ângulo *-55º* (*longitudes oeste — e latitudes sul — são negativas*). Completemos a figura com os pontos La_1 e Lo_2. Tracemos o paralelo p (p_1p_2). O segmento $m_1=C_1Lo_1$ é a vista de cima m_1 do meridiano que contém P. Portanto podemos obter P_1 como intersecção de p_1 com m_1. Naturalmente, P_2 será a intersecção de p_2 com m_2.

A curva m_2, representada na figura, parece ser uma semi-elipse. Na realidade, assim é, pois trata-se da vista de frente de uma semi-circunferência (o meridiano que passa por Lo). Como construir essa semi-elipse? Nós conhecemos um ponto, Lo_2 e a semi-elipse é o resultado do alongamento (eixo P_NP_S e razão C_2Lo_2/C_2N_2) da semi-circunferência g_2 — vista de frente do meridiano de Greenwich.

Recorrendo a um *software* de geometria dinâmica, esta construção é quase imediata (mais detalhes *online*). Assim, *nas vistas*, o ponto P fica determinado, como pretendíamos. A construção do ponto P na perspectiva cavaleira é imediata, a partir das suas vistas e recorrendo à ferramenta *cavaleira*[3]. Como na perspectiva cavaleira o equador é representado por uma elipse, não é possível obter de modo imediato o meridiano de P, por meio de uma rotação do valor da longitude. Mas, se quisermos definir um ponto Q sobre a esfera, trabalhar *apenas na perspectiva e* abdicarmos de partir de um valor numérico das coordenadas , o processo pode ser o seguinte:

- considere um ponto L sobre o meridiano de Greenwich, definindo uma latitude;
- considere ainda um outro ponto sobre o equador, K, definindo uma longitude, embora não numericamente;
- por meio de uma construção simples – *a tracejado na figura* — e de um *software* de geometria dinâmica, obtenha os correspondentes meridiano e paralelo, e a sua intersecção, o ponto Q.

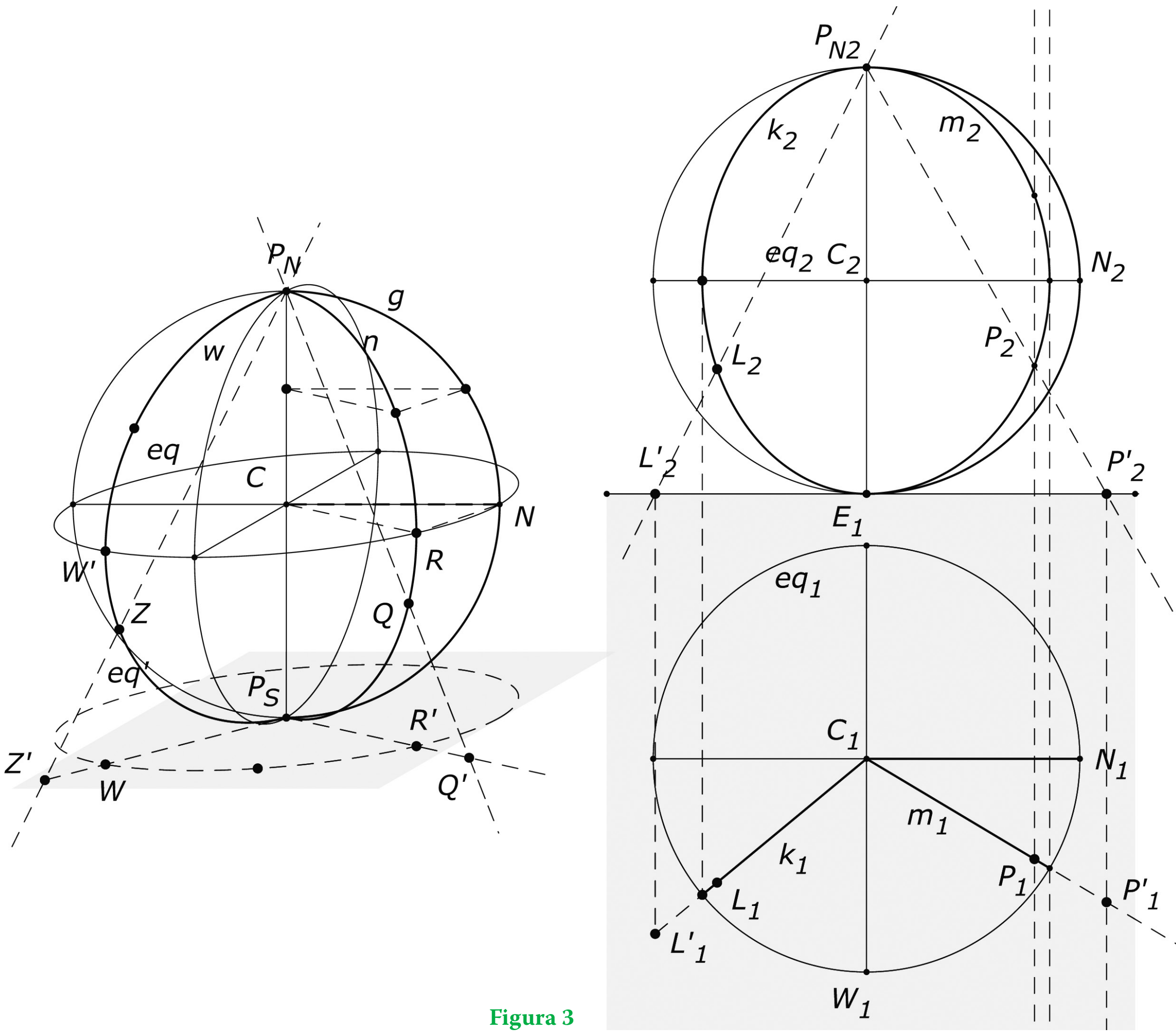

Figura 3

II. *Dado um ponto P sobre a esfera, nas vistas, construir a sua projecção estereográfica P´*(fig. 3).

Imagine o leitor como, dado a vista de cima P_1 de um ponto P, suposto sobre a esfera, poderá determinar o meridiano m que contém P e depois escolher uma das duas hipóteses para P_2, como fizemos na fig. 3. A partir daí, a construção de P' (P'_1, P'_2) é óbvia.

III. *Dado um ponto Q sobre a esfera, na perspectiva, construir a sua projecção estereográfica Q´* (fig. 3).

Tal como no problema I, pode construir um ponto Q sobre a esfera, na perspectiva, e obter ao mesmo tempo o meridiano de Q, seja n. Fazemos a translação (vector *CPs)* do ponto R, intersecção do meridiano n com o equador, obtendo $R´$. O ponto $Q´$é a intersecção da semi-recta P_NQ com a semi-recta $P_SR´$.

IV. *Dado um ponto* $L´(L'_1,L'_2)$ *no plano tangente no PS, nas vistas, obter a imagem* $L(L_1,L_2)$ *pela inversa da projecção estereográfica* (fig. 3).

Determina-se, tal como em casos anteriores, o meridiano k cujo plano contém o ponto $L´$. A intersecção do segmento L'_2P_N com k_2 determina o ponto L requerido.

V. *Dado um ponto Z´ no plano tangente no* P_S, *na perspectiva, obter a imagem Z pela inversa da projecção estereográfica* (fig. 3).

Efectuamos a translação, de vector CP_S, do equador, obtendo $eq´$, e depois determinamos a intersecção W de $Z´P_S$ com $eq´$. Efectuamos a translação, de vector P_SC, de W, obtendo o ponto $W´$. Como anteriormente, construímos o meridiano, seja w, passando por $W´$. A intersecção da recta $Z´P_N$ com w será a imagem Z requerida.

PROPRIEDADES DA PROJECÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Recomendamos de novo que o leitor recorra à rica informação que poderá encontrar *online* sobre esta importante transformação geométrica[4]. Neste ponto iremos referir duas propriedades fundamentais desta transformação:

1) a projecção estereográfica transforma circunferências em circunferências;

2) a projecção estereográfica é conforme, ou seja, conserva os ângulos.

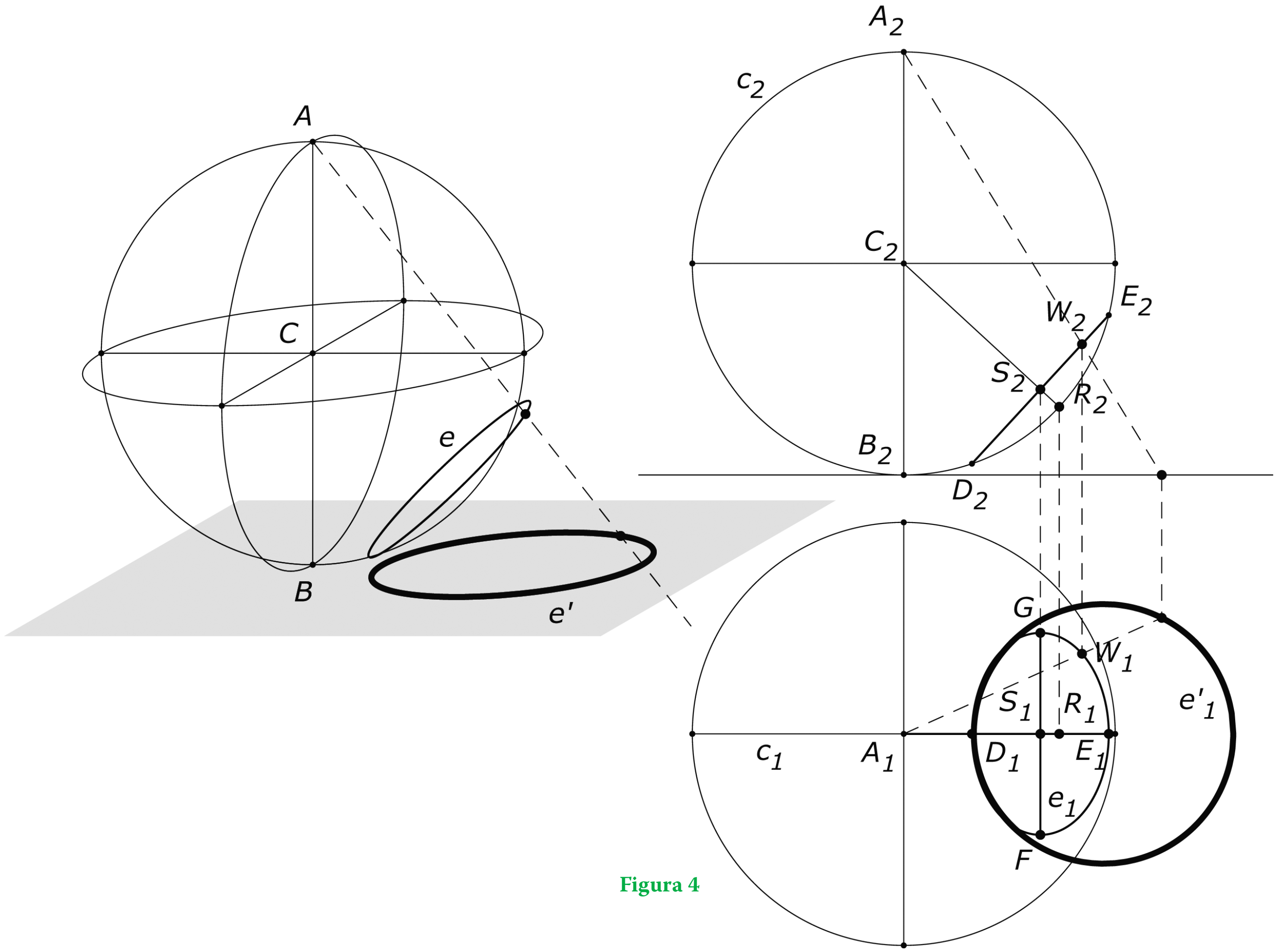

Figura 4

Demonstrações relativamente elementares destes resultados estão incluídas no texto que referenciamos na nota 4. A segunda propriedade referida será o ponto de partida fundamental para o traçado da linha de rumo de Pedro Nunes, que abordaremos no terceiro artigo desta série. Quanto à propriedade da transformação de circunferências em circunferências, iremos tentar uma "constatação experimental", no fundo um pretexto para mais algum trabalho em geometria descritiva elementar.

Uma animação que poderá ver num video, online, será bastante mais convincente.

Seja então dada (nas vistas da geometria descritiva) uma esfera (terrestre ou não...). Sejam A e B os "pólos", C o centro, R um ponto qualquer da circunferência c (c_1, c_2) (fig. 4). A esfera é tangente ao plano horizontal de projecção no ponto B.

Seja S um ponto do raio CR e consideremos o plano passando por S e perpendicular ao raio CR. A intersecção do plano com a esfera será uma circunferência que na vista de frente é projectada no segmento D_2E_2 e na vista de cima é projectada numa elipse de eixo menor D_1E_1 e eixo maior FG de medida igual a D_2E_2.

A projecção estereográfica no plano tangente em B pode ver–se a cheio na vista de cima e *parece* realmente uma circunferência.

Notas

1. O endereço do *website* da Associação Atractor é *www.atractor.pt.* Procure a curva loxodrómica nos *Temas Matemáticos*.

   Para uma apresentação mais completa da projecção estereográfica, recorra a um bom tratado de geometria, como

   Coxeter, H.S.M. *Introduction to Geometry.* J. Wiley & Sons, 1969, New York.
2. *https://www.eduardoveloso.pt/geom_textos*
3. A ferramenta *cavaleira*, que foi descrita no artigo anterior e para a qual existe *online* um vídeo explicativo, foi gerada para o *Geometer's Sketchpad*. Se o leitor utiliza outro programa, deverá existir um modo de produzir uma ferramenta equivalente.
4. Um texto de Bill Casselman, da University of British Columbia (cass@math.ubc.ca) intitulado *Essays on automorphic forms-Stereographic projection* está disponível online

   https://www.math.ubc.ca/~cass/research/pdf/Stereographic.pdf.

Eduardo Veloso