Os Polígonos estrelados regulares e a fórmula de Euler

Carlos Alberto M. de Assis
Thiago Barcelos Castilhos

A igualdade $e^{i\theta} = \cos\theta + i.sen\theta$, conhecida como a fórmula de Euler é uma das mais belas fórmulas. Sendo assim, o objetivo deste artigo, é mostrar a utilização da expressão do lado esquerdo da fórmula (no caso, $e^{i\theta}$) na construção de polígonos estrelados regulares.

USANDO $e^{i\theta}$ NA CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES

Primeiramente, vamos utilizar equações polinomiais da forma $x^n - 1 = 0$, e, atrelado a encontrar essas raízes, utilizaremos $e^{i\theta} = \cos\theta + i.sen\theta$, na construção do polígono regular inscrito na circunferência. Observe que, resolver equações desse tipo, nada mais é, do que encontrar as *n* raízes de *índice n* da unidade, fazendo rotações, considerando $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ onde *K=0, 1, 2, ...,n-1,* $\sqrt[n]{1} = cis(\frac{2k\pi}{n})$, ver em [2]).

Comecemos, então, exemplificando, com a equação $x^5 - 1 = 0$. Ou seja, iremos calcular as raízes de ordem 5 de 1, e construir o polígono chamado de pentágono regular. Fazendo os cálculos, para *K=0*, temos $e^{i.0} = \cos 0 + i.sen0 = 1$; para *K=1*, fica,

$$e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos\frac{2\pi}{5} + i.sen\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1 + i.\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)}{4},$$

que equivale a uma rotação de 72º, ou ainda, temos $\frac{1}{5}$ da volta. Para o valor de *K=2*, obtemos,

$$e^{\frac{4\pi}{5}i} = \cos\frac{4\pi}{5} + i.sen\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5} - 1 + i.\left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)}{4};$$

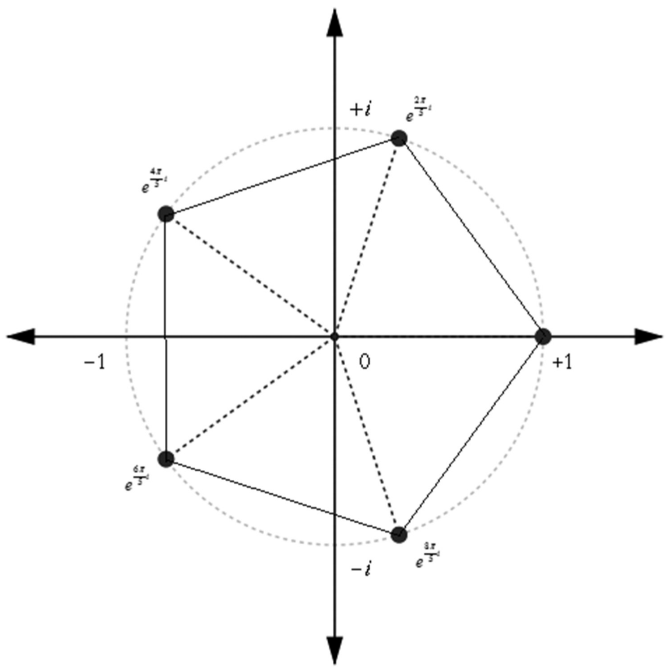
no caso de *K=3,* ficamos com,

$$e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos\frac{6\pi}{5} + i.sen\frac{6\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5} - 1 - i.\left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)}{4},$$

e, finalizando, sendo K=4, temos,

$$e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos\frac{8\pi}{5} + i.sen\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1 - i.\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)}{4}.$$

Estes valores são rotações sucessivas de 72º. A representação geométrica dessas raízes está no gráfico a seguir.



OS POLÍGONOS ESTRELADOS

A representação de um polígono estrelado regular se dará através da notação *{n/r}*, onde *n* e *r* são primos entre si e $1 < r < \frac{n}{2}$. Essa notação significa que, a construção desses polígonos estrelados se dará ao construirmos o polígono regular de *n* lados através da resolução da equação $x^n - 1 = 0$, e fazendo *r* rotações (ou voltas) utilizando a sequência dos valores encontrados, respectivamente, nas potências $e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \left(e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)^2, \left(e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)^3$, ... em torno da origem, iremos obter as “pontas” do polígono.

UM EXEMPLO

Para exemplificar, vamos iniciar, com a construção do seguinte polígono estrelado regular tão conhecido em nossa literatura, que é a “estrela de 5 pontas”, e, será representada usando a notação {5/2}. Ou seja, *n=5* representa a construção do pentágono regular (usando a equação $x^5 - 1 = 0$ conforme mencionado antes), e, fazendo rotações de 2 em 2 pontos (a sequência das potências de uma de suas raízes) em torno da origem, serão construídas as “pontas” dessa estrela.

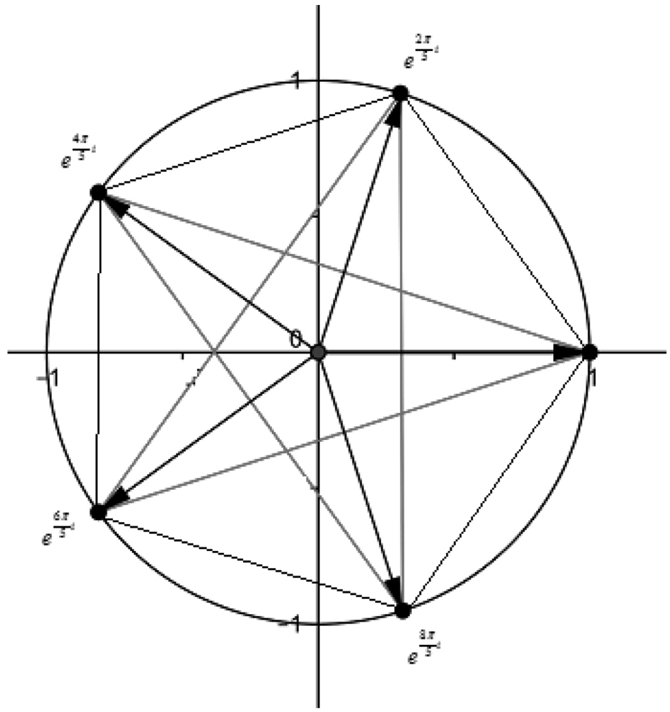
Voltando às raízes da equação $x^5 - 1 = 0$, perceba que se escolhermos $e^{\frac{2\pi}{5}i}$ ou $e^{\frac{8\pi}{5}i}$, , as sequências de suas respectivas potências serão, $\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}, \left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2, \ldots, \left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5\right)$ e $\left(e^{\frac{8\pi}{5}i}, \left(e^{\frac{8\pi}{5}i}\right)^2, \ldots, \left(e^{\frac{8\pi}{5}i}\right)^5\right)$, e ambas irão “percorrer” os 5 pontos da circunferência formando o pentágono regular. Só nos restam verificar as sequências de $e^{\frac{4\pi}{5}i}$ e $e^{\frac{6\pi}{5}i}$. Assim, para as potências de $e^{\frac{6\pi}{5}i}$, temos as seguintes rotações, $e^{\frac{6\pi}{5}i}$,

$$\left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^2 = e^{\frac{12\pi}{5}i} = e^{\frac{2\pi}{5}i}, \quad \left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^3 = e^{\frac{18\pi}{5}i} = e^{\frac{8\pi}{5}i},$$

$$\left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^4 = e^{\frac{24\pi}{5}i} = e^{\frac{4\pi}{5}i}, \quad \left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^5 = e^{\frac{30\pi}{5}i} = e^{6\pi i} = 1 \text{ e}$$

$$\left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^6 = e^{\frac{36\pi}{5}i} = e^{\frac{6\pi}{5}i}.$$

Veja, que essa sequência irá construir as “pontas” da estrela dentro do pentágono regular, fazendo rotações de 2 em 2 pontos em torno da origem em uma circunferência de raio unitário.



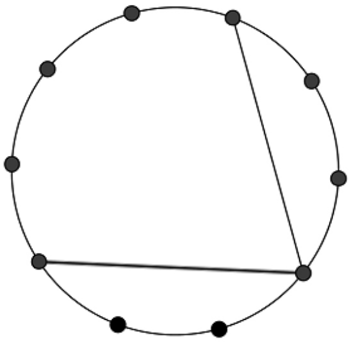
Observação:

Note que, para $e^{\frac{4\pi}{5}i}$, teremos, em um primeiro instante, a “mesma” estrela de 5 “pontas”, com a notação {5/3}. Mas, repare que esse polígono não satisfaz a condição de $1 < r < \frac{n}{2}$.

A SOMA DOS ÂNGULOS DAS “PONTAS” DO POLÍGONO ESTRELADO

Uma relação importante que merece atenção, é que a soma dos ângulos internos das “pontas” de um polígono estrelado regular é dada por $S=(n-2r)\times 180^0$. Esta relação foi descoberta pelo matemático Thomas Bradwardine (1290 – 1349). Assim, por exemplo, a soma dos ângulos internos das “pontas” de {5/2}, é igual a, $S=(5-2\times 2)\times 180^0 = 180^0$.

Para mostrar tal relação, perceba que a circunferência é dividida em n partes iguais, então, cada arco mede $\frac{360°}{n}$ graus. Agora, ao escolhermos o vértice de partida, são feitas *r* “voltas” para a construção do primeiro lado e depois r “voltas” novamente, formando o primeiro ângulo inscrito (que nada mais é do que uma “ponta” do polígono estrelado) como ilustra a figura seguinte:



Como foram dadas *2r* "voltas", temos então um arco de $\frac{360^o}{n}(n-2r)$ graus, e com isso, cada ângulo das "pontas" do polígono estrelado regular é dado por $\frac{180^o}{n}(n-2r)$. Mas, como são n ângulos, podemos multiplicar $\frac{180^o}{n}(n-2r)$ por n e obter a soma S. Para aguçar a curiosidade do leitor, deixamos como exercício, que construa os seguintes polígonos estrelados: {7/2}, {7/3}, {8/3}, {9/2}, {9/4} e {10/3}.

Referências Bibliográficas:

[1] COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry,* New York, 1969.

[2] COXETER, H. S. M. *Regular Polytopes,* 3rd. ed., Dover Publications, 1973.

[3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática,* tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

[4] FERNANDEZ, C. S., JR, N. C. B. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa,* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática/ Coleção Textos Universitários, 2006.

Carlos Alberto M. de Assis

Universidade Estácio de Sá – Campus Cabo Frio

Thiago Barcelos Castilhos

Professor da Rede Municipal de Cabo Frio – RJ

Tutor presencial do CEDERJ pólo de São Pedro d'Aldeia/RJ

ESTATUTO EDITORIAL DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

A *Educação e Matemática* é uma publicação periódica da Associação de Professores de Matemática (APM). A sua periodicidade atual é de cinco números anuais, sendo um deles temático e duplo. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro. Os principais objetivos da *Educação e Matemática* são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas atuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias… A *Educação e Matemática* tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com caráter permanente. A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista. À semelhança das outras revistas informativas, a Educação e Matemática assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Diretora da Educação e Matemática