Regra da derivada do quociente revisitada

Em Josevich (2016) foi feita uma abordagem alternativa à prova da regra da derivada do produto de duas funções evitando o argumento clássico de prova que consiste em adicionar e subtrair uma determinada quantidade. Acontece que truques como esse podem ser bastante contraintuitivos para estudantes. Argumentos similares de \`adicionar e subtrair' são usados também para provar a regra da derivada do quociente. Provas alternativas podem ser obtidas usando a regra da cadeia ou derivação implícita. No entanto, essas ferramentas aparecem mais tarde, enquanto que a regra do quociente aparece logo no início do Cálculo Diferencial. Aqui, inspirados pela ideia de Josevich deduzimos também a regra do quociente.

Começamos por obter três regras usando a definição de derivada e artifícios algébricos simples como casos notáveis e redução ao mesmo denominador:

1. $$(f^2)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))(f(x+h) + f(x))}{h} = 2f(x)f'(x).$$

2. $$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)f(x)}}{h} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Agora, com uma combinação de 1. e de 2. obtemos:

3. $$\left(\frac{1}{f^2}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f^2(x+h)} - \frac{1}{f^2(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(f(x) - f(x+h))(f(x) + f(x+h))}{f^2(x+h)f^2(x)}}{h} = -2\frac{f'(x)}{f^3(x)}.$$

Usando 1. e 2. temos que:

4. $$\left[\left(f + \frac{1}{g}\right)^2\right]' = 2\left(f + \frac{1}{g}\right)\left(f + \frac{1}{g}\right)' = 2\left(f + \frac{1}{g}\right)\left(f' - \frac{g'}{g^2}\right) = 2\left(ff' - \frac{fg'}{g^2} + \frac{f'g}{g^2} - \frac{g'}{g^3}\right)$$

Usando 1. e 3. deduzimos que:

5. $$\left[\left(f + \frac{1}{g}\right)^2\right]' = \left[f^2 + 2\frac{f}{g} + \frac{1}{g^2}\right]' = 2ff' + 2\left(\frac{f}{g}\right)' + \left(\frac{1}{g^2}\right)' = 2\left(ff' + \left(\frac{f}{g}\right)' - \frac{g'}{g^3}\right)$$

Por uma observação direta de 4. e de 5. obtemos a regra da derivada do quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Durante a apresentação, em aula, podemos escolher apresentar a regra do produto, como em Josevich, usando 2. e finalmente observar que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\,\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} - f\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Referência

Josevich, P. (2016). An Alternative Approach to the Product Rule. *The American Mathematical Monthly, 123*(5), 470.

Mário Bessa

Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal.

Dois erros no uso do Teorema de Tales/Critérios de Semelhança de triângulos

O Teorema de Tales ocupa um lugar central no programa atual da disciplina de Matemática no 3.º Ciclo. É um resultado muito importante do ponto de vista teórico, no sentido em que serve de "alicerce" a outros resultados, também centrais, como sejam os critérios de semelhança de triângulos, por exemplo. Neste texto breve serão aspetos de natureza prática que serão abordados.

O Teorema de Tales surge nos manuais escolares, e noutras obras de referência, com diferentes formulações. Gosto particularmente do enunciado usado por Amorim [1]:

Se cortarmos os lados dum ângulo (ou os seus prolongamentos) por um feixe de paralelas, os triângulos formados terão os lados proporcionais (figura 1).

Simbolicamente:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BD}}$$

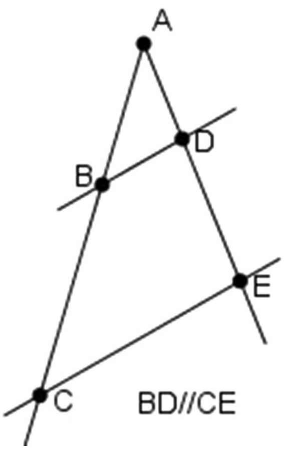


Figura 1

Da proporção

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \quad (1)$$

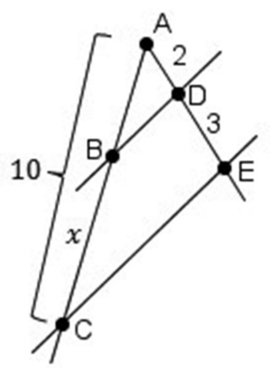
pode deduzir-se a proporção

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \quad (2)$$

Da proporção (2) pode ainda deduzir-se a proporção

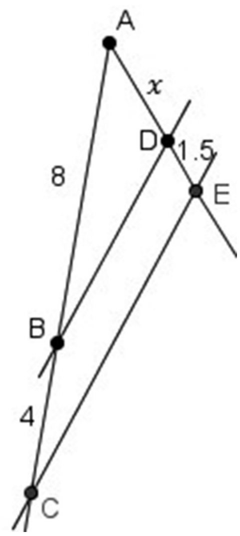
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \quad (3)$$

As proporções (2) e (3) são bastantes úteis em termos práticos, como se ilustra nos dois exemplos registados. Em cada uma das situações, assinalou-se a "proporção mais simples".



Proporção (1)	Proporção (2)	Proporção (3)
$\frac{10}{10-x} = \frac{5}{2}$	$\frac{10-x}{x} = \frac{2}{3}$	$\frac{10}{x} = \frac{5}{3}$

Figura 2



Proporção (1)	Proporção (2)	Proporção (3)
$\frac{12}{8} = \frac{x+1,5}{x}$	$\frac{8}{4} = \frac{x}{1,5}$	$\frac{12}{4} = \frac{x+1,5}{1,5}$

Figura 3

Na resolução de exercícios onde é possível o usar o teorema de Tales (ou os critérios de semelhança de triângulos) é usual alguns alunos escreverem a seguinte igualdade:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \qquad (\overline{AB} > \overline{BC})$$

Será que esta "proporção" poderá ser válida?

A resposta a esta questão é *sim*; esta igualdade é verdadeira, quando, e apenas quando, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ for igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de ouro).

Consideremos então a situação representada na Figura 4.

Suponhamos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \qquad (\overline{AB}>\overline{BC})$$

Pelo Teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

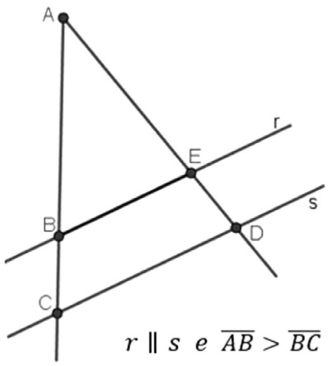


Figura 4

Designando $\overline{AB}$ por a e $\overline{BC}$ por b:

$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=1+\frac{b}{a}$$

fazendo $\frac{a}{b}=q$, vem: $q=1+\frac{1}{q} \Leftrightarrow q^2-q-1=0$

Resolvendo a equação anterior resulta: $q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Como q>1, $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Portanto, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$ quando, e apenas quando, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

É possível observar o erro referido acima na resolução seguinte.

A proporção apresentada pelo aluno está incorreta (figura 5). A igualdade $\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ ocorre somente quando $\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

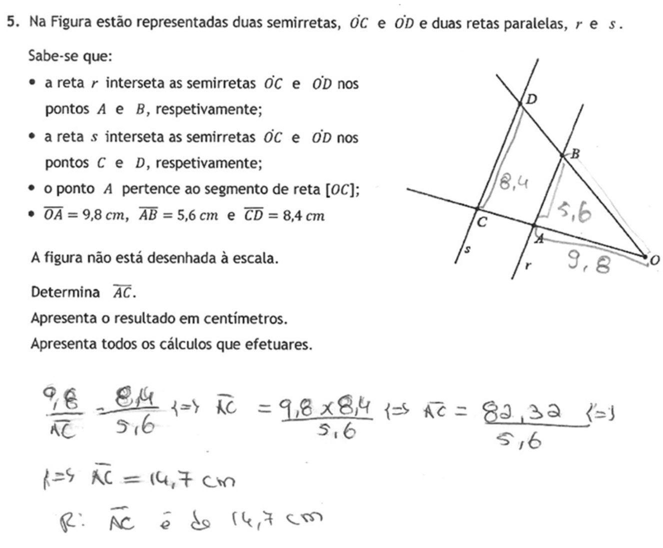


Figura 5

Outro erro que surge com alguma frequência pode ser observado na resolução que se apresenta na figura 6. A "proporção" apresentada pelo aluno só é válida quando, e apenas quando, $\overline{AH}=\overline{HI}$.

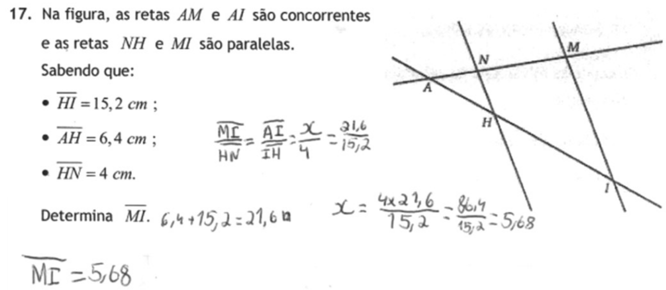


Figura 6

Demonstração.

Suponhamos que $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$

Pelo Teorema de Tales: $\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

Assim,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB}=\overline{BC}$$

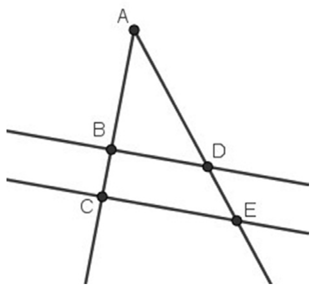


Figura 7

CONCLUSÃO

Contrariamente a outros erros que habitualmente observamos nas resoluções dos alunos, penso que não será fácil encontrar uma explicação para as duas situações referidas neste texto. Será que estes erros também ocorreriam na eventualidade dos alunos não terem conhecimento das igualdades (2) e (3) referidas? Convém, no entanto, ter presente que não facultando estas duas proporções aos alunos, surgirão, inevitavelmente, constrangimentos na resolução de alguns exercícios.

Referências

[1] Amorim, D.P. *Compêndio de Geometria*. Biblioteca Básica de Textos Didáticos de Matemática, Vol. I, SPM, ISBN: 972-99521-3-4.

[2] Araújo, V. P. *Curso de Geometria*, Gradiva, ISBN 972-662-591-2.

[3] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, L. Loura e M.ª C. Timóteo. *Programa e Metas Matemática*, Ensino Básico. MEC, 2013.

[4] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira e M.ª C. Timóteo. *Caderno de Apoio 3.º Ciclo – Metas Curriculares do Ensino Básico.* MEC, 2013.

Rogério Berrincha

Agrupamento de Escolas do Teixoso