

Geometria descritiva e perspectiva cavaleira

EDUARDO VELOSO

Começamos por recordar uma afirmação que deveria constituir, neste tempo em que se continua ainda à procura das “aprendizagens essenciais” na matemática escolar, o tema principal de reflexão sobre a matemática na escolaridade obrigatória:

“A razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural, associada ao facto de a matemática constituir uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de pensar e de aceder ao conhecimento”¹.

Se tal fosse aceite e seguido, seria natural que os estudantes portugueses acessem, por exemplo, ao longo da sua escolaridade, a algum dos trabalhos do matemático português Pedro Nunes — que para muitos, depois de 12 anos de matemática, é apenas o nome de uma escola em Lisboa.

Acontece que a tecnologia nos dá hoje a possibilidade de explorar temas de matemática, sobretudo de geometria, que sem o seu recurso seriam inacessíveis. Com a ajuda de software apropriado, esses temas podem contribuir assim para a finalidade apontada da educação matemática para todos. É o caso da *linha de rumo* de Pedro Nunes, um tema muito interessante que começaremos a abordar neste artigo. Tratando-se de uma curva sobre a esfera, teremos que recorrer a processos de representação, transformações geométricas e curvas auxiliares. Tal facto irá exigir uma sequência de três artigos:

- o primeiro dizendo respeito à geometria descritiva e à perspectiva cavaleira;
- o segundo dedicado a projecção estereográfica;
- e finalmente o terceiro apresentando a *linha de rumo* de Pedro Nunes.

Como dissemos, a tecnologia a que os alunos deveriam ter acesso permanente permite tratar este assunto num nível relativamente elementar. Recorreremos a um programa de geometria dinâmica, o *Geometer's Sketchpad* (GSP). Será possível, aos leitores que utilizem habitualmente outro programa, como o *Cabri*, ou mesmo o Geogebra, replicar os métodos, que mostraremos

em detalhe — descrições completas e pequenos vídeos online, por exemplo².

GEOMETRIA DESCRITIVA

Foi o matemático francês Gaspard Monge (1746-1818) que inventou a geometria descritiva, uma descrição dos princípios matemáticos para a representação de objectos tridimensionais no plano. Esta representação tinha naturalmente sido aproximada de forma empírica desde há muitos séculos por arquitectos e cenógrafos, mas Monge sistematiza-a de forma rigorosa. Como processo exemplar de matematização, envolvendo actividades de visualização importantes na educação matemática para todos, a sua abordagem elementar deveria ser considerada na escolaridade obrigatória.

A *Geometria Descritiva*, como disciplina, está integrada nos cursos superiores de arte, arquitectura e engenharia e no ensino secundário, como disciplina bial da componente específica dos cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologia e de artes visuais (e nos cursos de ensino artístico especializado de artes visuais). Faremos uma apresentação muito sumária da descritiva de Monge, apenas o que necessitamos para, por meio da perspectiva cavaleira, abordar a projecção estereográfica.

Imagine o leitor dois planos π_1 — horizontal e π_2 — vertical (figura 1). Os rectângulos sombreados servem apenas para indicar a posição relativa dos planos, pois estes estendem-se indefinidamente em todas as direcções. A intersecção dos dois planos chamava-se — no meu tempo, há 70 anos... — linha terra (LT). Imagine ainda um sólido tridimensional representado na figura: trata-se de uma pirâmide ABCDE, cuja base é o quadrado ABCD. Considere em seguida que efectua as projecções ortogonais da pirâmide sobre os dois planos, obtendo as figuras traçadas sobre π_1 e π_2 na figura 1.

Monge dá ainda um passo essencial: executa uma rotação de 90° de um dos planos de projecção em torno da recta LT, de modo a que os planos fiquem coincidentes e portanto as duas figuras possam ser desenhadas em verdadeira grandeza numa mesma folha de papel... Imaginemos então a rotação de π_1 em torno de LT de modo a ficar coincidente com π_2 .

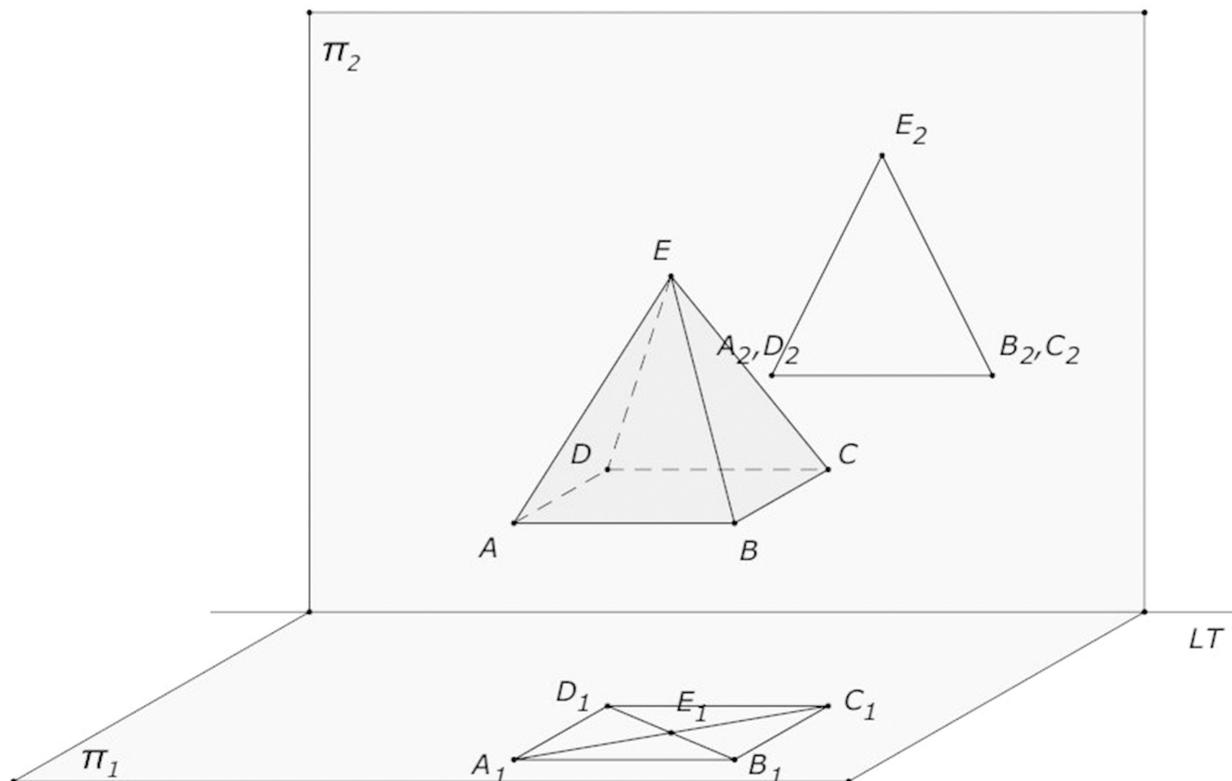


Figura 1

Na figura 2 está o resultado final. A pirâmide está apenas representada pelas suas projecções ortogonais nos dois planos, agora coincidentes. Devido a este facto, os sombreados não são precisos nesta representação. As duas figuras que representam a pirâmide são vulgarmente chamadas a vista de cima (projecção em π_1) e a vista de frente (projecção em π_2).

Em resumo, a tese de Monge, tal como está exposta nas lições que dava na Escola Normal Superior no ano III da República Francesa (1794), é que podemos ter um conhecimento completo de um objecto tridimensional se conhecermos as suas duas vistas, de frente e de cima³. Essas lições foram publicadas em 1799 e mereceram, de Poncelet e de Gauss, as seguintes observações:

Poncelet, 1865

Dissemos que a Geometria descritiva, tal como é empregue normalmente, tem, sobre a das coordenadas, a vantagem de usar apenas dois planos de projecção. Além disso, opera directamente e graficamente sobre as projecções e, por operações ainda gráficas, leva-nos ao que se refere à figura do espaço. Numa palavra, todas as relações ou propriedades descritivas do plano são traduzidas em relações ou propriedades espaciais, e reciprocamente.

Gauss, 1813

Esta obra deve ser louvada pela sua enorme clareza, a concisão do seu texto, a progressão bem conseguida do mais fácil ao mais difícil, a

grande quantidade de ideias que apresenta e a sua realização perfeita. Por essa razão, recomendamos a sua leitura; encontraremos aí um rico alimento espiritual, que contribuirá sem qualquer dúvida para a conservação e progresso do verdadeiro espírito geométrico que falta por vezes na matemática actual.

Julgamos que as palavras destes dois matemáticos são ainda muito justas, incluindo a falta de um verdadeiro espírito geométrico na educação matemática actual, estando a matemática na escolaridade obrigatória infestada de equações, coordenadas e análise... A inclusão nos programas de uma apresentação histórica e conceptual da geometria descritiva poderia contrariar esta tendência.

PERSPECTIVA CAVALEIRA

Se alguém nos pedisse um desenho dando a ideia do que é um cubo, nunca nos lembrariamos de desenhar as suas duas vistas em geometria descritiva... O que talvez fizéssemos era apresentar-lhe um dos desenhos da figura 3. Como se obtém este tipo de representação? Imaginemos um cubo no espaço e um plano exterior, no caso presente um plano paralelo à face DCGH. Efectuemos uma projecção cilíndrica (ou paralela) do cubo, mas não ortogonal, sobre esse plano. O resultado seria um desenho como os da figura 3. Apenas as imagens das faces paralelas ao plano de projecção se manteriam iguais às faces do cubo, as outras dependeriam da direcção de projecção. Este

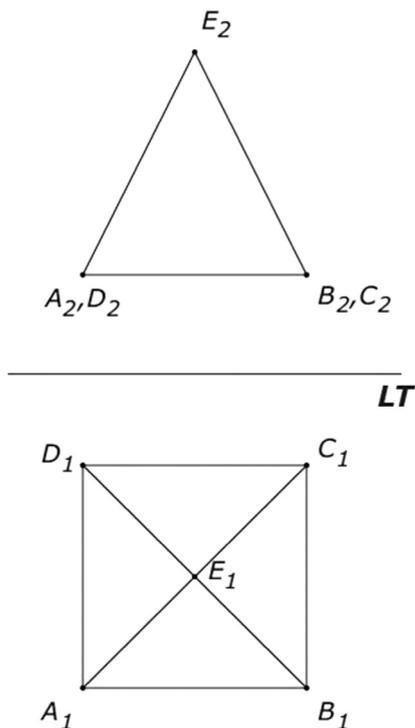


Figura 2

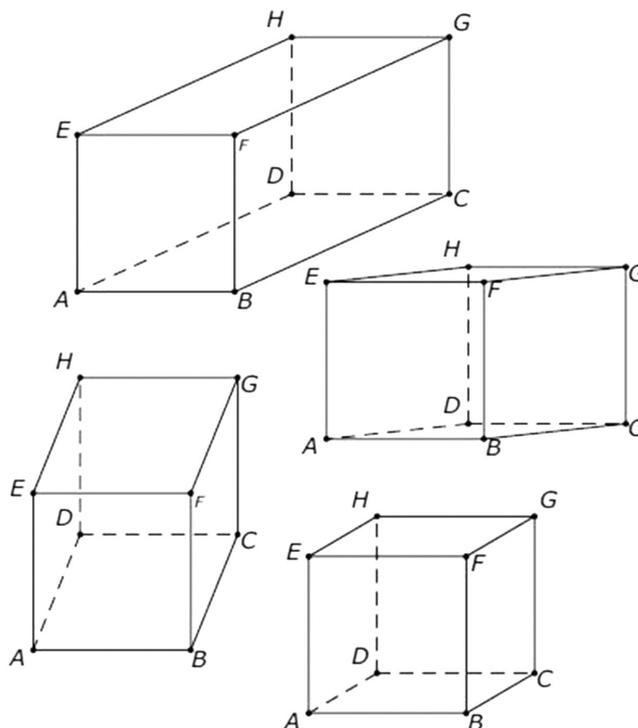


Figura 3

tipo de imagem do cubo é denominada representação do cubo em perspectiva cavaleira⁴.

Acontece que é muito simples, com a ajuda de um software de geometria dinâmica, como o GSP, construir a perspectiva cavaleira de um sólido tridimensional a partir das suas duas vistas em geometria descritiva.

Esse processo está descrito de forma completa, incluindo um pequeno vídeo, nas páginas online de apoio a este artigo (ver nota 2). Resta apenas dizer neste ponto que a direcção da projecção paralela preferida e portanto escolhida é a que tem como resultado a figura sombreada (em baixo, à direita). O que se pretende é que

- os segmentos ortogonais ao plano de projecção fiquem com 50% do comprimento dos segmentos iguais e paralelos ao plano de projecção, isto é $BC/AD = .5$
- o ângulo entre um segmento ortogonal e um paralelo seja de 30° ; por exemplo, $\text{ang}(AB,AD) = 30^\circ$.

No ponto seguinte, obteremos uma esfera em perspectiva cavaleira.

IMAGEM DE UMA ESFERA EM CAVALEIRA

Vamos mostrar como, a partir das vistas de frente e de cima de uma esfera, podemos obter a sua imagem em perspectiva cavaleira, tendo em atenção que em artigos seguintes esse tipo de imagem da esfera irá ser fundamental.

Trata-se de um processo exigindo um programa de geometria dinâmica, como o GSP. Aqui indicaremos o processo sem grandes detalhes, sendo o recurso aos materiais *online* essencial para a compreensão e execução prática da construção da perspectiva cavaleira. Iremos supor que a esfera de partida representa a esfera terrestre, dado que iremos posteriormente traçar sobre ela a *linha de rumo* do Pedro Nunes.

No lado direito da figura 4 estão representadas as vistas da esfera, que são obviamente duas circunferências iguais e com os centros na mesma perpendicular à linha terra (LT). Para fixar ideias, supomos que a semi-circunferência g_2 (a linha mais carregada) é a vista de frente do meridiano de Greenwich (sendo a sua vista de cima o segmento horizontal g_1). Como poderá ver *online*, definimos uma ferramenta denominada cavaleira, no GSP, que constrói, para cada par de vistas (P_2, P_1), o ponto correspondente P na perspectiva cavaleira (dada uma projecção paralela sobre o plano de frente, definida pelas suas vistas d_2 e d_1). Assim sendo, obtemos:

- a partir de C_2 e de C_1 ,
- a circunferência de centro C e raio igual ao segmento CP_N , que é a imagem em perspectiva cavaleira do meridiano de Greenwich;
- por meio do comando *locus*, o equador *eq* (ver *online*).

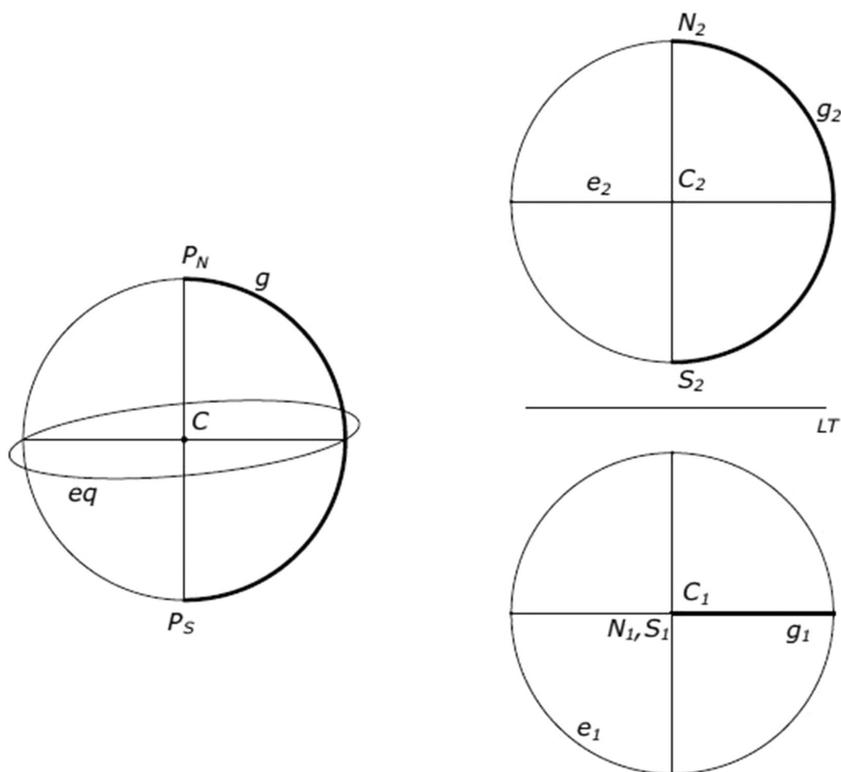


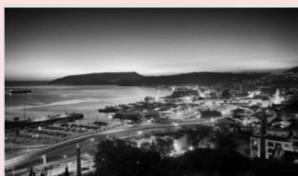
Figura 4

Notas

1. Paulo Abrantes, http://www.netprof.pt/pdf/Competencias_basicas/Matematica.pdf
2. Site de apoio a este artigo: https://www.eduardoveloso.pt/geom_textos
3. As lições de Monge estão publicadas: Gaspard Monge. *Geometrie Descriptive*. Editions Jacques Gabay, 1989, Paris.

4. Para informação suplementar sobre a perspectiva cavaleira, pode ler um texto de apoio, <http://www.apm.pt/apm/geometria/inoveg/egtext1.html>, a um curso organizado pelo Centro de Formação da APM em 1998: <http://www.apm.pt/apm/geometria/inoveg/curso.html>.

EDUARDO VELOSO



6th INTERNATIONAL CONGRESS of EDUCATIONAL SCIENCES and DEVELOPMENT

SETÚBAL (PORTUGAL), 21-23 JUNHO, 2018



De 21 a 23 de junho de 2018, na cidade de Setúbal, decorre o **6th International Congress of Educational Sciences and Development** que incide sobre diversos temas no âmbito das Ciências da Educação e da Psicologia do Desenvolvimento e tem como destinatários investigadores, docentes, educadores, estudantes, gestores e diretores escolares, abrangendo todos os níveis do sistema educativo formal e contextos informais de aprendizagem e educação. As datas de inscrição e de submissão de propostas, o programa e outras informações úteis estão disponíveis no site: http://congresoeducacion.es/edu_web6/presentacion_p.html