Que símbolos são estes?

Sandra Bento
Patrícia Damas Beites
Fátima Simões

No domínio de conteúdo Primitivas e Cálculo Integral, do novo Programa de Matemática do Ensino Secundário, surge uma lista de descritores norteados pelos objetivos gerais: Definir a noção de primitiva; Abordar intuitivamente a noção de integral definido; Resolver problemas. Apesar de aparecer logo no descritor 1.3. uma indicação para a possibilidade de representar as primitivas de $f(x)$ pela notação $\int f(x)dx$, só no descritor 2.2. surge o objetivo de conhecer a origem histórica da expressão $\int_a^b f(x)dx$.

Encontramos no *caderno de apoio* ao 12.º ano, secção PCI12, informação complementar com uma breve explicação sobre o símbolo $\int$. Atribui-se a Leibniz a sua introdução no século XVII, por ser a forma usada nessa época para a letra *s* e pretender abreviar a palavra soma. O texto continua de forma vaga e informal a explicar, sem referência, a atribuição do significado de produto de duas medidas à expressão $f(x)dx$. Resume a notação $\int f(x)dx$ como significando historicamente, se f for positiva, uma soma de áreas de retângulos com largura infinitesimal dx e altura $f(x)$, esta considerada constante ao longo de um intervalo de comprimento chamado desprezável.

Com este resumo, o professor só terá algumas pistas sobre a origem dos símbolos $\int$ e dx. A quantidade de informação formal que fica subentendida, nomeadamente com uma só referência a medidas infinitesimais como sendo assunto trivial, e a ausência de representações visuais caracterizam uma postura académica conhecedora do formalismo subjacente mas reticente quanto à contribuição da História da Matemática no ensino-aprendizagem.

HISTÓRIA, PORQUÊ?

O papel da História da Matemática na Educação tem vindo a ser marcadamente destacado com fundamentação de dois tipos: instrumento no ensino-aprendizagem da Matemática e objetivo em si mesmo (Jankvist, 2009). A este propósito, Radford, Boero e Vasco (2002) exploram a relação da História no desenvolvimento conceptual da Matemática com a aprendizagem desta. Destaca-se a importância da Psicologia Sócio-Histórica, que tem em Vygotsky um dos expoentes máximos, pelo papel relevante na conceção de aprendizagem, nomeadamente na construção da mente a partir das raízes socioculturais. Vygotsky (1989) analisa os mecanismos que integram História e Cultura no funcionamento cognitivo e identifica as bases natural e cultural. A influência da primeira manifesta-se nos processos cognitivos básicos mais relacionados com mecanismos automáticos de resposta; a segunda está implicada em funções superiores que dependem da capacidade do sujeito recorrer a processos simbólicos como raciocínio, resolução de problemas ou linguagem. Esta é a ferramenta da construção do pensamento que o autor mais valoriza, porque é veículo de expressão e agente mediador no contexto socio-histórico e cultural em que o indivíduo se desenvolve.

Da perspetiva sociocultural e histórica, a mediação é central na evolução humana, pois configura mudanças de ordem qualitativa ao longo do tempo. Considera-se que o desenvolvimento humano deve ter em conta as mudanças ocorridas simultaneamente a quatro níveis: filogenético (desenvolvimento da espécie), histórico (espécie), ontogenético (individual) e microgenético (processos psicológicos). São as funções psicológicas superiores que permitem o desenvolvimento do sujeito ao nível ontogenético, num *continuum* que se carateriza por transformações dialéticas qualitativas (Abreu, 2000).

Ao nível ontogenético, considera Vygotsky que existem dois saltos qualitativos: linguagem oral e linguagem escrita. A aquisição da linguagem constitui assim um marco importante no sentido em que, como sistema simbólico, é o mediador por excelência no desenvolvimento das funções psicológicas superiores, pois o indivíduo ao interagir com o seu contexto, mesmo não tendo acesso direto aos objetos, dispõe de sistemas simbólicos que representam a realidade na base da experiência e do conhecimento. A competência permite que o indivíduo consiga, de forma abstrata, analisar e generalizar as características dos objetos a outros acontecimentos e contextos e fundamentar a comunicação na sua função de transmissão das experiências ao longo da história (Luria, 1976; Vygotsky, 1989).

Através da linguagem constrói-se a comunicação, a planificação e a autorregulação dos processos de pensamento, sendo a função comunicativa a que o liga ao mundo externo, na relação com os intervenientes do contexto sociocultural e histórico. De igual forma, considera-se a Matemática um sistema de signos a serem apropriados pelo aluno a partir da interação com o contexto, da mediação dos professores e do desenvolvimento histórico da área. Os signos funcionam como ferramentas para solucionar problemas a nível cognitivo, tais como recordar, analisar e decidir.

Outro conceito fundamental, que permite compreender a importância de integrar historicamente conceitos matemáticos, é o de internalização dos mediadores culturais. Para Abreu (2000), o ato de contar dependerá de uma reconstrução interpessoal dos sistemas de contagem em uso num contexto cultural particular. Neste sentido, alguns auxiliares mais objetivos, por exemplo contar pelos dedos, serão progressivamente transformados em representações, subsidiárias de um discurso interno que permitirá ao indivíduo tornar-se autónomo, deixando assim de depender desses auxiliares.

Na construção da internalização dos mediadores culturais, destaca-se o papel estruturante do contexto através das propriedades dos sistemas de signos de uma cultura e das interações sociais dos membros dessa cultura com os aprendizes, uma vez que os primeiros são detentores do conhecimento do sistema de signos. Para esta construção é necessário que as culturas promovam processos de ensino-aprendizagem potenciadores do desenvolvimento. É neste âmbito que surge o conceito de zona de desenvolvimento proximal em Vygotsky – distância entre os níveis de desenvolvimento real e potencial. O primeiro refere-se a uma zona do desenvolvimento na qual o indivíduo resolve, de forma independente, as tarefas que a sua cultura lhe exige. O segundo configura um potencial que só será atingido se, nessa resolução, o indivíduo tiver a mediação de pares mais desenvolvidos, assumindo relevância o papel do professor e o dos métodos pedagógicos ativos.

FACTOS MARCANTES

A figura 1 reproduz uma elucidativa figura na tradução de Motte (1739) dos *Principia* de Newton, considerado, juntamente com Leibniz, um dos fundadores do Cálculo (Boyer, 1968). O enunciado conclui, da construção, que diminuindo a largura dos retângulos inscritos e aumentando o seu número *in infinitum,* a soma das áreas dos retângulos inscritos ou circunscritos à curva e a área delimitada pela curva serão iguais.

Segundo Rickey (1996), o símbolo de integral aparece impresso pela primeira vez em 1686 na primeira obra *Sobre uma geometria oculta e a análise dos indivisíveis e infinitos* de Leibniz. A primeira vez que a palavra integral aparece associada ao símbolo é num artigo de Jakob Bernoulli em 1690. O seu irmão Johann explica o uso dessa palavra em resposta a uma carta de Leibniz: consideração do "diferencial como uma parte infinitesimal de um todo ou integral" (citado em Rickey, 1996, p. 34).

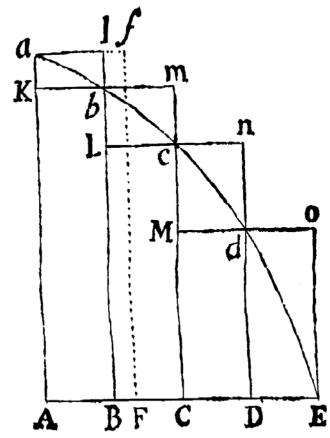

Figura 1. Reprodução da figura 6 em Motte (1739, p. 44)

Segundo Kline (1972, Vol. I), a ideia mais influente do Cálculo, depois dos conceitos de derivada e de integral como limite de uma soma, foi a de que o integral pode ser obtido invertendo o processo de diferenciação. As conclusões de Newton nesse sentido foram generalizações de ideias de muitos matemáticos antes dele, tendo sido particularmente influenciado pelo trabalho *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis. No que diz respeito a relacionar a soma de áreas infinitesimais com a reversão do processo para obter taxas de variação instantâneas, numa publicação de 1711 Newton determina a área abaixo de uma curva designando por momento de x o acréscimo infinitesimal o feito à variável, e por momento da área o acréscimo oy feito à área $z=ax^m$ debaixo da curva.

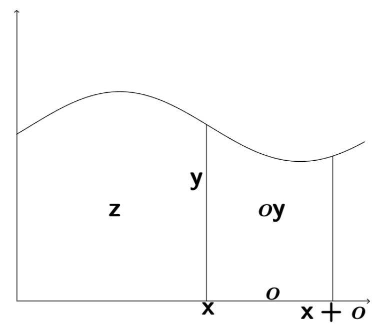

Figura 2. Reprodução da Fig. 17.13 em Kline (1972, Vol. I, p. 360)

Newton designa por $z + oy$ a área delimitada pela curva, pelos eixos e pela ordenada em $x + o$, concluindo que $z+oy=a(x+o)^m$. Newton prova que $y=amx^{m-1}$ dividindo o desenvolvimento binomial por o e desprezando, sem rigor formal, os termos com o. Reciprocamente, se a curva for definida por $y=amx^{m-1}$, então a área abaixo da curva é dada por $z=ax^m$. Como já tinha expressado esta mesma área como soma de áreas infinitesimais, Newton mostra assim que estas somas podem ser obtidas por reversão do processo de derivação (Teorema Fundamental do Cálculo integral).

Leibniz desenvolve em paralelo métodos análogos mas com diferenças, nomeadamente por o objeto de estudo inicial serem sequências de números, a partir das quais faz a transição para o Cálculo pensando nos seus termos como imagens por uma função. Elucidativo pode ser o facto do ponto de partida de Leibniz para a igualdade $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ ser o cálculo da área do triângulo de base x e altura $y = x$. Leibniz fará a transição do caso discreto das sequências para o caso geral em que dx e dy são incrementos de uma *função arbitrária*. Concluirá também que a "integração como processo de soma é o inverso da diferenciação" (Kline, 1972, Vol. I, p. 375).

Tanto Newton como Leibniz foram responsáveis pelas aritmetização do Cálculo e redução dos problemas de cálculo de áreas, até então tratados como somas, a processos de anti-diferenciação. Mas o rigor formal só chegará século e meio depois, no princípio do século XIX, com as contribuições de Bolzano, Cauchy, Abel, Dirichlet e Weierstrass, que chamam a si a missão de "trazer ordem ao caos" (Kline, 1972, Vol. III, p. 947). Quanto à definição de derivada, foi Cauchy que introduziu as quantidades dx e dy, cujo quociente é $f'(x)$, em 1821. É também Cauchy que publica a primeira demonstração formal do Teorema Fundamental do Cálculo.

O significado preciso do termo infinitesimal e a abordagem nos cursos atuais de Cálculo continua a ser assunto de debate. Tall (1981) enuncia a premissa polémica de que o velho cálculo infinitesimal, criticado nos últimos três séculos por constituir uma teoria imprecisa e imperfeita, pode ser perfeitamente satisfatório em determinados contextos de ensino pré-universitário. Analisa várias hipóteses de abordagem do conceito, iniciando com o "velho e intuitivo método infinitesimal" de Leibniz (Tall, 1981, p. 16), mas, depois de discutir a necessidade de ferramentas de níveis distintos de sofisticação, conclui que o método do limite dinâmico, com exemplos numéricos e visualizações dinâmicas, pode constituir a melhor abordagem inicial.

HISTÓRIA, COMO?

Jankvist (2009) considerou três categorias na utilização da História da Matemática em sala de aula: iluminação; modular; de base histórica. Na primeira, a informação histórica surge como um complemento ao ensino-aprendizagem da Matemática. Exemplo desta seria uma biografia de Leibniz. Na segunda, a estruturação é por módulos dedicados à História, como algumas aulas relativas ao currículo mas propiciando o estudo de outros conteúdos. O desenvolvimento da Matemática ao longo do tempo fundamenta a terceira, aplicando-se indiretamente no ensino-aprendizagem. Um exemplo seria a ordem de apresentação de $\mathbb{N}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ respeitando a evolução histórica.

Katz, Dorier, Bekken e Sierpinska (2002) referem estudos de caso que relacionam os domínios histórico e psicológico, dando exemplos da História da Matemática onde transparecem as dificuldades dos matemáticos em problemas do currículo escolar numa versão contemporânea, e para os quais parecem existir dificuldades de aprendizagem. O exemplo que interessa particularmente no contexto do Cálculo Integral é o conceito de limite, pois aí reside o mistério do termo infinitesimal. É de alguma forma esclarecedor que a formalização rigorosa do conceito de limite, a instilação do rigor na Análise (Kline, 1972, Vol. III) só tenha sido desenvolvida cerca de século e meio depois da contribuição de Leibniz e Newton.

O referido exemplo é objeto de pesquisa de Schneider (1988) que conclui que as dificuldades na passagem da intuição para a compreensão rigorosa no conceito de limite e as consequentes na compreensão da noção de integral como área limitada por uma curva, provêm do mesmo obstáculo epistemológico: "os alunos não conseguem separar na sua mente a matemática do mundo ilusoriamente sensível das medidas" (Katz, Dorier, Bekken & Sierpinska, 2002, p. 150). Como referem Radford, Boero e Vasco (2002), esse obstáculo é a fonte de erros previsíveis e recorrentes de um indivíduo ao tentar utilizar conhecimento para resolver um problema. Distingue-se de obstáculos individuais, como as capacidades cognitivas, ou de obstáculos didáticos criados pelas escolhas de ensino.

Bussi e Sierpinska (2002) consideram que a abordagem histórica no ensino da Matemática pode ser feita de forma explícita, com a consulta de documentos ou estudos histórico-epistemológicos relacionados com os conceitos, mas também pode ser implícita. Na investigação de Schneider (1988) as tarefas são desenhadas com o intuito de confrontar os alunos com as suas crenças prévias. A mediação do professor é fundamental para garantir a consciencialização das perceções da Matemática pelos alunos e das suas conexões com os fenómenos físicos percetíveis. A eficiência desta abordagem deve ser testada caso a caso, atendendo à especificidade dos conteúdos, à origem sócio-cultural dos estudantes e às variáveis didáticas precisas.

Mason (2002) sugere a História da Matemática para humanizar, advogando que alguns alunos podem ser conquistados se tiverem noção das dificuldades que os matemáticos passaram ao longo do tempo, sujeitos às suas próprias paixões e fragilidades, para chegar a resultados que foram sendo aperfeiçoados. Para isso sugere táticas para as aulas, que contribuam para a aprendizagem dos alunos e o enriquecimento do currículo: recolher uma coleção de retratos e curiosidades sobre matemáticos ou teoremas importantes; localizar os momentos em que certos símbolos ou ideias emergiram e a sua evolução; explorar controvérsias; e estabelecer conexões entre resultados que surgem em diferentes momentos de aprendizagem e para os quais não se adivinha à partida uma ligação.

O fazer matemática, processo heurístico que inclui erros e dúvidas, tem vindo gradualmente a ser reconhecido como muito importante do ponto de vista didático. A comunicação da

Matemática é, em geral, organizada de forma linear, mas esconde as motivações e as dúvidas que surgiram no seu desenvolvimento. A integração da História da Matemática no ensino, com reservas elencadas por Tzanakis e Arcavi (2002), pode contribuir para mostrar aos alunos que erros, dúvidas, argumentos intuitivos, becos sem saída, controvérsias e abordagens alternativas são parte integrante da construção matemática. A integração pode ser direta, com factos e fontes históricas, mas também indiretamente inspiradora numa abordagem genética do ensino-aprendizagem (Tzanakis & Arcavi, 2002). Esta visão, caso particular das abordagens de base histórica, considera fundamental, para a atribuição de significado pelos estudantes, o carácter de necessidade do objeto de estudo como solução para um problema. Segue a metodologia de recuperar as ideias chave e questões que originaram novos caminhos de investigação ao longo da evolução histórica do assunto estudado, e tentar reconstruir os passos de forma didaticamente apropriada para a sala de aula.

Schneider (2002) apresenta exemplos, inspirados na História da Matemática, do grupo de trabalho Abordagem Heurística da Análise. Reproduzimos aqui a abordagem do conceito de limite, pois nela reconhecemos a introdução à definição de integral na nossa prática letiva, ainda que com o auxílio de representações visuais.

Considera-se a área limitada por $y=x^3$, $x=0$, e $y=0$. Preenche-se esta com *n-1* retângulos inscritos, cuja soma das áreas é dada pela sucessão:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\times\left(\frac{i}{n}\right)^3=\frac{1}{n^4}\times\sum_{i=0}^{n-1}i^3=\frac{1}{n^4}\left(\frac{n\,(n-1)}{2}\right)^2=\frac{n^4-2n^3+n^2}{4n^4}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Considera-se também a sucessão definida pela soma das áreas dos retângulos circunscritos:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\times\left(\frac{i+1}{n}\right)^3=\frac{1}{n^4}\times\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^3=\frac{1}{n^4}\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

As duas sucessões têm ambas limite $\frac{1}{4}$. Para provar que o valor da área pretendida é este limite, observa-se que a mesma é limitada pelas duas sucessões (Schneider, 2002, p. 246).

Também encontramos este tipo de abordagem genética em Paschos e Farmaki (2011). Os autores recuperam elementos históricos do século XIV, relacionados com o estudo do movimento no final da Idade Média, destacando o papel das representações geométricas do movimento e da Geometria Euclidiana no aparecimento do Cálculo. Transcrevem enunciados de alguns matemáticos, designados na época por calculadores, onde são definidos os conceitos de velocidade instantânea, movimento de aceleração uniforme e não uniforme, e se enuncia o Teorema da velocidade média, acompanhados das representações na figura 3.

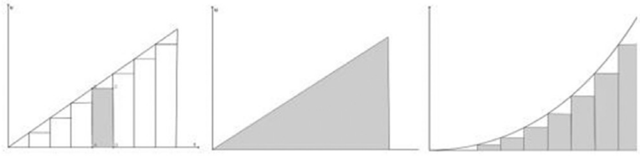

Figura 3. Representações de abordagem genética (Paschos & Farmaki, 2011, p. 148)

As tarefas de Paschos e Farmaki (2011) são baseadas em situações de estudo de um movimento, em particular usando gráficos tempo-velocidade para a representação que são familiares aos alunos. Estes identificam a representação de grandezas relacionadas com o movimento (tempo, velocidade, distância percorrida) nos gráficos, instrumentos fundamentais de mediação numa abordagem intuitiva a conceitos matemáticos.

Referências

Abreu, G. (2000). O papel mediador da cultura na aprendizagem da Matemática: A perspectiva de Vygotsky. *ESC, 13*, 105-117.

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics.* New York: Wiley.

Bussi, M., & Sierpinska, A. (2002). The relevance of historical studies in designing and analysing classroom activities. In J. Fauvel, J. V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 154-161). Dordrecht: Springer.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educ. Stud. Math.*, *71*, 235-261.

Katz, V., Dorier, J.-L., Bekken, O., & Sierpinska, A. (2002). The role of historical analysis in predicting and interpreting students' difficulties in mathematics. In J. Fauvel, J. V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 149-154). Dordrecht: Springer.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Vol. I-III). New York: Oxford University.

Luria, A. R. (1976). *Cognitive development*. Cambridge, MA.: Harvard University.

Mason, J. (2002). *Mathematics Teaching Practice.* Cambridge: Woodhead.

Motte, A. (1739). *The Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Vol. I), Sir Isaac Newton. London: Middle-Temple-Gate.

Paschos, T., & Farmaki, V. (2011). Integrating the History of Mathematics into Activities Introducing Undergraduates to concepts of Calculus, In V. Katz, C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 145-163). MAA.

Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2002). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In J. Fauvel, J. V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 162-167). Dordrecht: Springer.

Rickey, V. F. (1996). *Historical Notes for the Calculus Classroom.* Washington: American University.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, Tese de Doutoramento, Université Catholique de Louvain.

Schneider, M. (2002). A heuristic introduction to analysis implicitly inspired by its historical development. In J. Fauvel, J. V. Maanen

(Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 245-248). Dordrecht: Springer.

Tall, D. (1981). Comments on the difficulty and validity of various approaches to the calculus. *FLM*, *2*, 16-21.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom. In J. Fauvel, J. V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 201- 240). Dordrecht: Springer.

Vygotsky, L. S. (1989). *A formação social da mente.* São Paulo: Martins Fontes.

Agradecimentos

P. D. Beites agradece o apoio do Governo Português através da Fundação para a Ciência e a Tecnologi, projeto UID/MAT/00212/2013 do CMA-UBI

Sandra Bento
Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior

Patrícia Damas Beites
Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior e CMA-UBI

Fátima Simões
Departamento de Psicologia e Educação, Universidade da Beira Interior e LabCom.IFP

O terceiro encontro de professores organizado pela Associação de Professores de Matemática e o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, no âmbito de um protocolo de colaboração entre estas instituições, será dedicado à reflexão sobre a flexibilidade curricular em Matemática nos diferentes níveis de escolaridade, num momento em que este tema está na ordem do dia, assumindo-se também como um tempo e um espaço de formação de professores.

Pretende-se, com este encontro, aprofundar a reflexão e o debate em algumas questões relativas à flexibilidade curricular nomeadamente no que se refere ao Projeto de Autonomia de Flexibilidade Curricular (PAFC). Com esta finalidade apresenta-se um programa do encontro com três Sessões plenárias — uma conferência seguida de debate, uma apresentação do PAFC, um painel sobre aspetos específicos do tema do encontro — e sessões paralelas de Grupos de Discussão por ciclos de escolaridade.

O encontro realiza-se em Lisboa no Instituto de Educação, a 5 de maio de 2018, entre as 9 horas e 30 minutos e as 17 horas e 30 minutos. A Associação de Professores da Matemática e o Instituto de Educação convidam à participação os professores do ensino básico e do ensino secundário, a quem o encontro é particularmente dirigido.

O encontro será certificado como ação de curta duração (Despacho n.º 5741/2015 Artigo 3.º).