Paralelas no quadrado

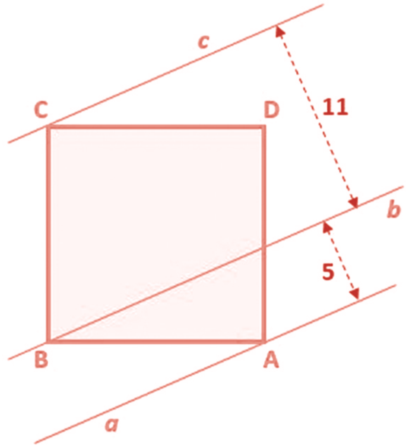
Temos um quadrado ABCD.

Pelos vértices A, B e C traçamos três retas paralelas a, b e c.

A distância entre as retas a e b é de 5 centímetros e entre as retas b e c é de 11 centímetros.

Qual é a área do quadrado?

(Respostas até 10 de junho, para zepaulo46@gmail.com)



Perfeições numéricas

O problema proposto no número 143 de Educação e Matemática foi o seguinte:

> *A Graça encontrou três números naturais que cumprem estas condições:*
>
> – *A diferença entre quaisquer dois deles é um quadrado perfeito.*
> – *A soma dos três números é um quadrado perfeito.*
> – *O maior dos números é o menor possível.*
>
> *Quais são os números da Graça?*

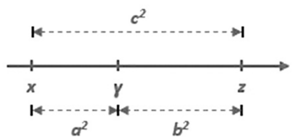
Recebemos dez respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Edgar Martins (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Letícia Martins (Guimarães), Manuel Saraiva (Covilhã), Mário Roque (Guimarães), Martim Correia (Alcácer do Sal) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Uma primeira questão se levantou ao Alberto, ao Carlos e ao Edgar: Os números da Graça podem ser repetidos? Por exemplo, será de admitir (1, 1, 2) ou (3, 3, 3) como soluções? Aí, o Martim foi categórico: "No início, sabia que não podia haver números repetidos porque a diferença entre eles seria de 0, e 0 não é um quadrado perfeito". Realmente, a definição com mais aceitação é a de que os quadrados perfeitos são números naturais (1, 4, 9, 16, 25, …) e não incluem o zero. Além disso, reforça o Carlos, o problema ficaria "muito pouco interessante."

Ultrapassada esta dúvida, quase todos os nossos leitores seguiram, com mais ou menos formalismo, um processo semelhante.

Sejam x, y e z os números procurados por ordem crescente.

Façamos um esquema, usando a primeira informação.



Logo, $a^2+b^2=c^2$ e portanto *(a, b, c)* é um terno pitagórico.

Como queremos a menor solução possível, vamos partir do terno (3, 4, 5), sendo então as diferenças entre pares de números iguais a 9, 16 e 25.

Podemos escrever os números da Graça em função do menor deles:

$y = x + 9$ e $z = x + 25$

A soma dos três números tem de ser um quadrado perfeito Q:

$x + (x + 9) + (x + 25) = Q$ ou $3x = Q - 34$.

Então, $Q - 34$ tem de ser múltiplo de 3. Experimentemos os possíveis valores de Q maiores que 34.

Se $Q = 36$, vem $3x = 36 - 34 = 2$. Não serve.

Se $Q = 49$, vem $3x = 49 - 34 = 15$. Logo, $x = 5$.

Os números da Graça são (**5, 14, 30**).

Encontrada a solução, há quem vá mais longe, apresentando resultados que cumprem todas as condições exceto a última.

Ainda a partir do menor terno pitagórico (3, 4, 5), o Mário indica os casos seguintes: (10, 19, 35), (22, 31, 47), (29, 38, 54), (45, 54, 70), (54, 63, 79), …

Já o Manuel e o Carlos, usam o terno pitagórico (6, 8, 10) para encontrar (11, 47, 111), (20, 56, 120), (40, 76, 140), …

Finalmente, o Carlos escolhe o terno (9, 40, 41) para as soluções (29, 110, 1710), (58, 139, 1739), etc.