Sublinhando resultados da investigação em modelação matemática e aplicações na aprendizagem

Susana Carreira

Um ensino da Matemática que ignore ou descarte, como algo supérfluo, a atividade de modelação matemática e as aplicações da Matemática em problemas do mundo real, representa um dano para a educação matemática dos jovens e futuros cidadãos. Esta afirmação perentória tem hoje uma clara fundamentação em inúmeras recomendações e orientações internacionais, entre as quais bastará mencionar a reiterada ênfase dada pelos suportes teóricos dos estudos do PISA à capacidade de interpretação, compreensão, análise e tratamento matemático de situações mais ou menos complexas que envolvem problemas da vida quotidiana e fenómenos do mundo real, tanto físico como social, como da esfera do trabalho. Muitas vezes, tais problemas ou situações problemáticas são designados como fracamente estruturados (*ill-structured* no Inglês) para acentuar a sua natureza indeterminada, ambígua, passível de múltiplas abordagens, por vezes confusa e desordenada, por contraste com questões ou problemas cuja estrutura matemática se apresenta como mais definida e previsível.

Há ainda várias ideias enraizadas quanto à forma de ver a modelação matemática no ensino e aprendizagem da Matemática. Uma delas é a de que esta atividade pressupõe uma base prévia de conhecimentos matemáticos, sem os quais o aluno será incapaz de construir e desenvolver um modelo matemático plausível da realidade. Esta ideia tem vindo a ser contestada por estudos e experiências que têm revelado nitidamente que as crianças, desde cedo, têm a capacidade de trabalhar em problemas de modelação matemática e de criar modelos válidos e interessantes para diversas situações sobre as quais são capazes de pensar, refletir e investigar.

Igualmente, há que salientar duas velhas resistências com as quais se dissimula, muitas vezes, a rejeição ou a recusa de incluir a modelação matemática e as aplicações na aula de Matemática, desde o 1.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. A primeira é a ideia de que as tarefas de modelação requerem um tempo prolongado e porventura excessivo para a sua realização. Com efeito, são olhadas, por vezes, como um entrave a um certo tipo de ensino, altamente centrado nos conteúdos, na formalização e no treino de técnicas matemáticas. A segunda resistência consiste na visão de que a modelação matemática não é verdadeiramente Matemática e não cabe nos chamados "conteúdos matemáticos", não merecendo, por isso, a mesma prioridade e a mesma urgência na aula de Matemática. Fica, pois, reservada para um momento de eventual desafogo na planificação do ensino e adquire então o estatuto de uma atividade recreativa e diferente para motivar os alunos ou desanuviar a sala de aula.

A investigação e os estudos já produzidos, tanto a nível teórico como de experiências no terreno, têm, contudo feito vingar resultados e conclusões que contrariam francamente estas e outras ideias cristalizadas. Hoje, podemos afirmar com bastante segurança que a modelação matemática tem uma importância irrefutável na aprendizagem da Matemática de todos os alunos e em todos os níveis de ensino. São vários os fóruns internacionais em que o debate e a investigação se têm desenvolvido e afirmado, neste domínio. Destacaria, por uma questão de brevidade, organizações como o ICTMA (*International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*) e o ERME (*European Society for Research in Mathematics Education*), no último dos quais existe um T*hematic Working Group on Applications and Modelling*. Serão, genericamente, estes dois fóruns que servirão de base a algumas das notas que me proponho dar neste artigo, relativamente a alguns dos principais contributos da inclusão de modelação e aplicações na aprendizagem dos alunos.

Antes, porém, importa salientar que ao falar de aprendizagem estarei a dar uma latitude alargada ao conceito, incluindo nessa amplitude aspetos que, embora muitas vezes negligenciados pelo currículo, não passam despercebidos a alguns decisores políticos. Refiro-me à importância, cada vez mais reconhecida, da capacidade de mobilização de conhecimento matemático e extra-matemático para a resolução de problemas de enorme complexidade e exigência, no mundo em que vivemos, e que rapidamente se podem exemplificar: a premência de encontrar formas eficientes de gerir recursos naturais exauríveis, a necessidade de controlar e erradicar epidemias, ou a busca de soluções eficientes de transporte de pessoas e mercadorias ou, ainda, o desenvolvimento de estratégias para lidar com a poluição e o aquecimento global, entre muitos outros grandes problemas. Para todos estes grandes problemas é óbvio que a integração de conhecimentos científicos de múltiplas áreas é indispensável e também que a participação de modeladores matemáticos será indubitavelmente uma mais-valia.

É neste contexto que vejo com apreço as palavras do ex-presidente dos EUA, Barack Obama, no seu discurso na Feira de Ciências da Casa Branca[1]: "*A ciência é mais do que uma disciplina escolar, ou que a tabela periódica, ou que as propriedades das ondas. É uma abordagem ao mundo, uma forma crítica de compreender, explorar e de lidar com o mundo, adquirindo assim a capacidade de mudar esse mundo e de compartilhar esse conhecimento acumulado. É uma forma de pensar que diz que podemos usar o raciocínio e a lógica e a investigação honesta para chegar a novas conclusões e resolver grandes problemas*".

Abraçando as ideias resumidas nesta curta declaração, apresento em seguida um exemplo do que pode ser feito na aula de Matemática com uma tarefa[2] de modelação matemática que envolve trabalho experimental e o desenvolvimento de um protótipo do mundo real.

UMA TAREFA DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA: EXPLORAR A MATEMÁTICA NO MUNDO REAL

A tarefa foi construída e aplicada em duas turmas do 9.º ano, no âmbito de uma investigação de doutoramento em curso no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Neste estudo, todas as tarefas de modelação (no total de cinco) foram realizadas em aulas de Matemática regulares, tendo como caraterísticas comuns a criação de um ambiente experimental que pressupõe a utilização de materiais relacionados com o problema proposto e a produção de um relatório escrito por cada grupo sobre o trabalho efetuado e as conclusões obtidas. Além disso, foi igualmente decidido que cada uma das tarefas colocaria um problema em que era pedida uma resposta para uma necessidade ou encomenda apresentada por uma pessoa ou grupo de pessoas.

A tarefa "Calibração de tomates" refere-se à necessidade de criar um sistema de calibração de frutos, por exemplo de tomates, segundo um sistema designado por calha (ou trilho) em V, em que os frutos deslizam ao longo de uma calha em forma de V, colocada em plano inclinado, em que os dois bordos da calha formam um ângulo agudo. À medida que os frutos rolam sobe a calha, vão caindo num coletor, de acordo com o seu diâmetro, sendo que no início a distância entre os bordos é menor e no final é maior. A figura 1 ilustra um destes mecanismos de calibração que existem efetivamente para realizar a calibração de frutos por tamanho.

Figura 1. Calibração de frutos por diâmetro num sistema de calha em V

É sabido que, atualmente, na comercialização de produtos agrícolas existem regulamentações diversas sobre a qualidade dos produtos elegíveis para o consumo. Entre outras, ainda que discutível, está a tendência para a uniformização dos tamanhos dos frutos por classes (por isso se designa também de classificação) que são consideradas aceitáveis e que levam, além disso, a uma diferenciação no preço de venda. Existem empresas cujo ramo de atividade é o da produção de sistemas de calibração de frutos e hortícolas, que apresentam as caraterísticas técnicas dos seus sistemas e demonstram como funcionam e o que permitem fazer. A figura 2 está ligada a uma dessas empresas que apresenta diversas imagens e vídeos *online* sobre os processos de calibração[3] que oferece aos seus clientes.

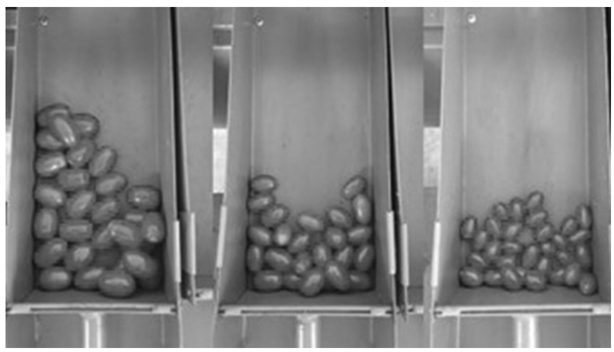


Figura 2. Um exemplo da separação de tomates por calibres

O enunciado da tarefa "Calibração de tomates" é o seguinte:

1 Disponível em https://obamawhitehouse.archives.gov/the-press-office/2015/03/23/remarks-president-white-house-science-fair

2 A tarefa "Calibração de tomates" é uma das tarefas especificamente desenvolvidas no trabalho de investigação que faz parte integrante da tese de doutoramento em Didática da Matemática, de Ana Margarida Baioa, professora de Matemática do Agrupamento de Escolas D. Manuel I – Tavira.

3 Foto disponível em http://www.mvisia.com.br/images/calibradora_tomates_03.jpg

Um pequeno produtor de tomates está a terminar a sua primeira colheita do ano. A colheita dos frutos está a ser feita de forma contínua e os tomates estão a ser armazenados em caixas. O seu objetivo é a venda dos tomates a uma empresa distribuidora que pretende a entrega dos frutos em caixas, segundo diferentes calibres. A calibração de frutos pode ser feita segundo vários critérios (cor, peso, tamanho), sendo o tamanho o mais frequente e mais simples. O agricultor contactou uma firma de equipamentos agrícolas, solicitando aconselhamento para uma forma eficiente e rápida de calibração de tomates por tamanho.

O pedido do agricultor implica ensaiar um protótipo para a calibração dos tomates, como se segue.

Resposta a consulta Nº FR26 de "Tudo fresquinho", 02/03/2017
- Amostra de tomates retirados de 5 caixas
- Análise de tamanhos e definição de calibres
- Separação pelo sistema em V
- Obtenção de modelo de separação para operação do mecanismo

Da experiência…

Tens à tua disposição uma amostra de tomates, tesoura, fita métrica e fita-cola. Utiliza o trilho formado por duas barras ligadas numa extremidade, que devem ser colocadas em plano inclinado e com um ângulo de abertura conveniente. Tens cartão rígido para colocar verticalmente por baixo do trilho de modo a formar divisórias. Os tomates, ao rolarem no trilho, deverão cair na divisão certa de acordo com o seu calibre.

…ao modelo

Define as classes de calibres dos tomates, usando os diâmetros. Regula as separações a colocar no mecanismo em forma de V para que os tomates, ao deslizarem sobre o trilho, caiam nas aberturas corretas e fiquem separados por calibres.

Antes do início da aula, foram colocados na sala os materiais que os alunos, em grupos, iriam utilizar na realização da tarefa. Cada grupo tinha uma calha ou trilho previamente construído com duas estacas de madeira, unidas numa das extremidades por uma dobradiça que permitia variar a sua abertura. Poderiam usar caixas variadas, de uso comum, que lhes foram disponibilizadas, para apoiarem as extremidades da calha de modo a que esta ficasse inclinada. Tinham ainda pedaços de cartão grosso que teriam de cortar com o tamanho adequado e colar a pequenos suportes de madeira para assim criarem separadores que posicionariam por baixo do plano da calha e que funcionariam como divisórias para a recolha dos frutos. Por fim, cada grupo recebeu uma amostra de 10 tomates com diâmetros variados.

A figura 3 ilustra um ensaio de utilização do sistema de calibração em V antes da implementação da tarefa em sala de aula.

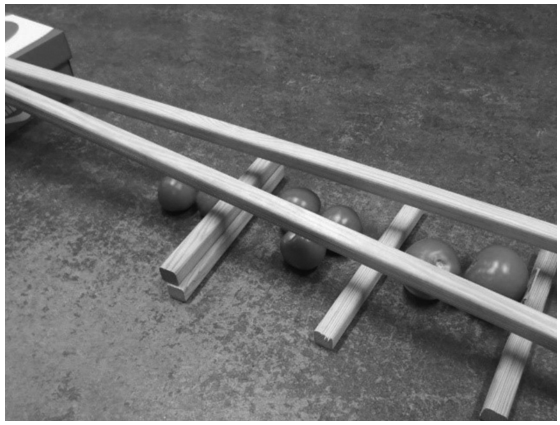
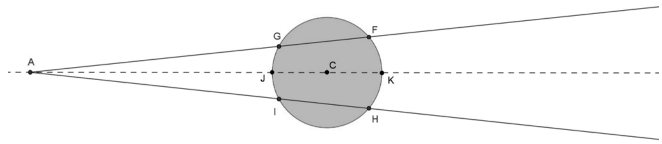


Figura 3. Testes prévios de funcionamento do material usado para simular o trilho em V

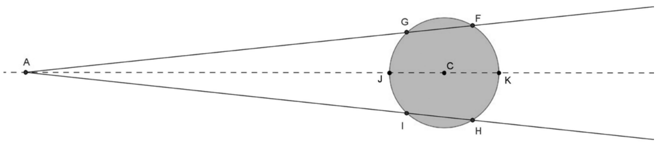
Uma das caraterísticas relevantes da tarefa está no facto de se poder usar o sistema em V para realizar experiências com frutos de tamanhos variados, podendo testar-se a melhor abertura da calha e também decidir sobre as classes de diâmetros que se irão estabelecer. Com efeito, grupos diferentes propuseram diferentes soluções para a classificação dos frutos, havendo alguns que optaram por definir apenas 3 classes de calibres e outros grupos definiram 4 ou mais classes. A possibilidade de efetuarem medições, com uma fita métrica, quer dos diâmetros dos tomates (usando o perímetro equatorial) quer das dimensões do trilho em cada uma das separações, levou ao desenvolvimento de modelos essencialmente empíricos para a definição das classes. Posteriormente, a criação de um modelo matemático para a calibração pelo sistema em V permitiu gerar uma importante discussão e exploração da situação experimental, que envolveu a construção e reconstrução de conceitos matemáticos relevantes, entre os quais: semelhança de triângulos, esfera e circunferência, diâmetro da esfera, reta tangente a uma circunferência, bissetriz de um ângulo e mediatriz de um segmento, circunferência inscrita num triângulo isósceles, razões trigonométricas do triângulo retângulo, variável independente e dependente, função linear, proporcionalidade direta, etc.

Quando se examina o funcionamento do sistema em V, percebe-se que o fruto rola apoiado sobre os dois bordos da calha (isto é, sobre duas retas concorrentes oblíquas) e que, em certo momento, cai porque deixa de ter apoio nas calhas. No momento imediatamente anterior, o tomate terá a sua circunferência equatorial tangente às duas calhas. Usando o GeoGebra para visualizar e explorar esta situação, podemos construir um ângulo agudo e um círculo com um dado raio que se vai deslocando ao longo da bissetriz (figura 4a, 4b, 4c). É evidente que estão a ser assumidas muitas simplificações neste modelo da situação real, começando por uma óbvia que é a de assumir que o tomate tem uma forma esférica.

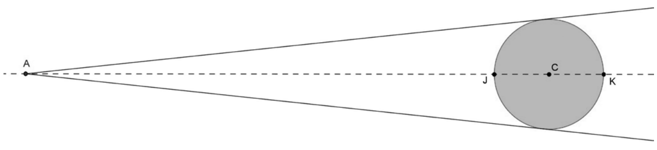
A figura 4 mostra que inicialmente a esfera está apoiada nas calhas, observando-se as cordas *GF* e *IH* nas duas primeiras posições, determinadas pelos lados do ângulo sobre o círculo. Na última posição, as cordas deixam de se observar e isso corresponde ao facto de haver apenas um ponto de contacto entre o círculo e cada um dos lados do ângulo. Nessa situação limite, o fruto está encaixado entre os bordos da calha, mas *imediatamente a seguir* ele cai no intervalo da calha e é recolhido por um recipiente. Todos os círculos de diâmetro inferior ao representado cairiam "dentro" da calha em posições anteriores, isto é, mais próximas da origem do ângulo.



4a



4b



4c

Figura 4 (a, b, c). Simulação do deslocamento da esfera sobre a calha e verificação da passagem do fruto entre as calhas

Assim, podemos estabelecer uma divisória (perpendicular à bissetriz) que nos indica essa mesma condição. Antes da divisória, cairão os frutos de calibre inferior ao dado; depois da divisória, irão cair os frutos de calibre superior. A figura 5 mostra essa divisória e permite ainda observar a medida da abertura da calha tomada com base nos pontos de intersecção da divisória com os lados do ângulo (distância entre *L* e *M*). Na experiência prática, esta medida pode ser obtida com uma fita métrica no protótipo real. Analogamente, pode medir-se o comprimento da calha desde a origem do ângulo até à divisória (distância entre *A* e *L*). Conhecendo estas medidas, podemos saber qual o diâmetro da circunferência (ou diâmetro máximo

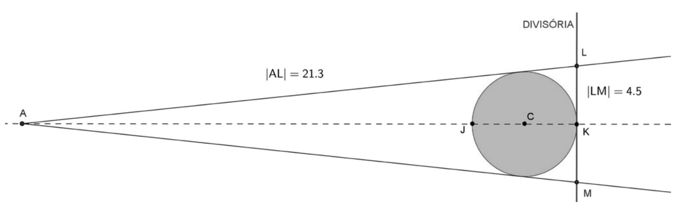


Figura 5. Representação da posição em que a esfera, ao rolar sobre a calha, cai entre os dois braços da calha, exatamente antes da divisória

da esfera). Esta medida é obviamente dada pelo GeoGebra mas pode também ser conseguida com recurso a noções geométricas.

Estamos na situação em que a circunferência está inscrita num triângulo isósceles (figura 6). Isso significa que a circunferência é tangente aos três lados do triângulo *AML* e sabemos que o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência. Portanto, o triângulo *ABC* é um triângulo retângulo em *B*. Além disso, é semelhante ao triângulo retângulo *AKL*, uma vez que têm em comum o ângulo em *A* (metade do ângulo formado pelos lados da calha).

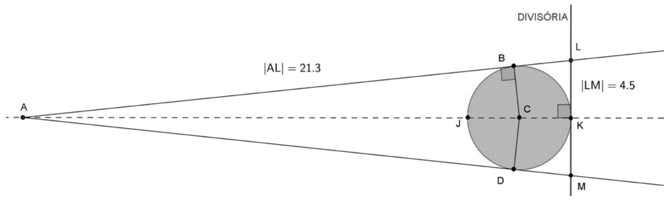


Figura 6. Circunferência inscrita no triângulo isósceles AML

Assim, de acordo com a figura 6, sabendo que $\overline{KL} = 2{,}25$ (metade da distância entre *L* e *M*) e $\overline{AL} \cong 21{,}3$, ao aplicar-se o Teorema de Pitágoras, obtém-se $\overline{AK} \cong 21{,}18$.

Em seguida, usando a semelhança de triângulos, tem-se a relação:

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{AL}} = \frac{r}{\overline{AK} - r}$$

Substituindo os valores conhecidos, determina-se o comprimento do raio da esfera:

$$\frac{2{,}25}{21{,}3} = \frac{r}{21{,}18 - r} = \frac{2{,}25 * 21{,}18}{23{,}55} \cong 2$$

Notamos, portanto, que a abertura da calha (distância entre *L* e *M*), que designaremos por *b*, é *b*=4,5 e que o diâmetro da esfera é $D = 4$. Isto mostra que a medida da abertura da calha não tem a mesma medida do diâmetro máximo ou calibre do tomate que vai ser recolhido nessa divisória. A colocação das divisórias deve, então, ter em conta este facto.

Uma das questões que parece ser relevante examinar, neste problema, é a seguinte: será o aumento do diâmetro proporcional à distância percorrida pelo fruto até à sua queda? Ou, de outro modo: se quisermos estabelecer as divisórias de modo a que haja um acréscimo constante do calibre, como deve ser estabelecida a medida da abertura da calha? A intuição e a experiência levam-nos a pensar que o calibre aumenta proporcionalmente à distância percorrida pelo tomate sobre o trilho. Da mesma forma, parece razoável supor que o calibre correspondente a cada divisória aumenta proporcionalmente à abertura da calha. E, do ponto de vista geométrico, se considerarmos novamente a semelhança de triângulos, veremos como colocar divisórias que limitarão os diâmetros, por exemplo, na sequência: $D_1=4$, $D_2=6$, $D_3=8$.

O caso do diâmetro $D_1=4$ está já resolvido e corresponde a uma abertura b_1=4,5 . A figura 7 evidencia a semelhança entre os sucessivos triângulos, de acordo com a qual é possível calcular a abertura da calha da 2ª e da 3ª divisória, usando a proporção: $\frac{D_1}{b_1} = \frac{D_n}{b_n}$

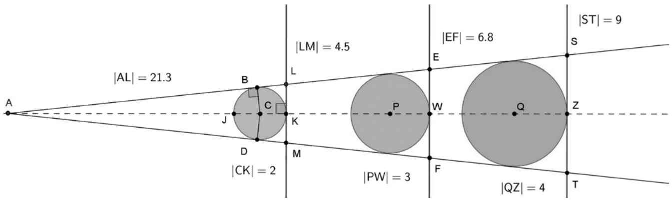


Figura 7. Variação dos diâmetros dos tomates e correspondentes aberturas da calha em V

Assim, para um diâmetro de 6 unidades, vem uma abertura $b_2 = \frac{4,5 \text{ x } 6}{4} \cong 6,8$ e, para um diâmetro de 8 unidades, a abertura será $b_3 = \frac{4,5 \text{ x } 8}{4} = 9$. Visto de outra forma, por cada acréscimo *k* que adicionarmos ao diâmetro inicial da esfera, a abertura da calha terá um acréscimo de $\frac{4,5}{4}k$.

Tomando a abertura da calha como função do calibre, x, é fácil concluir que se trata de uma função linear, cuja expressão será: $b(x) = \frac{4,5}{4}x$.

Finalmente, se preferirmos usar o comprimento *l*, medido sobre o lado do ângulo, desde o vértice até à posição da divisória, uma proporção análoga pode ser utilizada: $\frac{D_1}{l_1} = \frac{D_n}{l_n}$. Para esta opção, importa lembrar que o comprimento l_1=21,3 corresponde ao diâmetro D_1=4. Logo, para cada incremento *k* no diâmetro do tomate, faremos um aumento de $\frac{21,3}{4}k$ na distância entre o vértice e a divisória. Se pensarmos na função em que o comprimento l depende do calibre x, teremos então: $l(x) = \frac{21,3}{4}x$.

Na aula, os grupos usaram uma ou outra das duas abordagens, como se pode ver nas figuras seguintes (figuras 8 e 9).

Figura 8. Medição da distância entre o vértice e a divisória

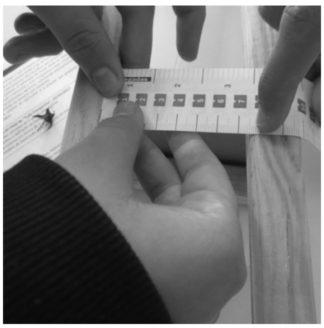


Figura 9. Medição da abertura da calha onde se colocou a divisória

A título de exemplo, um dos grupos considerou as seguintes classes de diâmetros, usando letras para as designar:

CLASSE D	CLASSE C	CLASSE B	CLASSE A
0 – 3,2 cm	3,3 – 5,2 cm	5,3 – 6,2 cm	6,3 – 7,8 cm

Possivelmente, o limite máximo foi induzido pelo tamanho do maior tomate que aparecia na amostra que o grupo recebeu. É interessante comparar esta proposta com a tabela que uma empresa do México, produtora e exportadora de produtos hortícolas, apresenta na sua página na Internet[4] para os calibres de tomates destinados a exportação (figura 10). As semelhanças são curiosas e evidenciam a capacidade dos alunos de compreenderem o problema e de trabalharem sobre ele de uma forma racional e bastante plausível.

Figura 10. Exemplo de classificação de tomates por diâmetro, em 4 classes

O modelo que foi obtido para o sistema em V, que permite saber a distância entre o vértice e a divisória, bem como a abertura da calha, como função do diâmetro, pode ser facilmente aplicado para esta ou qualquer outra proposta de classes de calibres, mantendo o ângulo de abertura da calha inicialmente estipulado. Por exemplo, para limitar o diâmetro de 56 mm, a abertura da calha onde se coloca a divisória terá de ser $b(5,6) = \frac{4,5}{4} \times 5,6 \cong 6,3$. Já a distância do vértice à divisória deverá ser $l(5,6) = \frac{21,3}{4} \times 5,6 \cong 29,8$.

CONSIDERANDO A INVESTIGAÇÃO SOBRE MODELAÇÃO MATEMÁTICA E APLICAÇÕES NA APRENDIZAGEM

O exemplo da tarefa “Calibração de tomates” e a breve referência ao trabalho que os alunos, na sala de aula, podem desenvolver nessa tarefa, tirando partido de materiais simples e usuais, permitem sublinhar as caraterísticas fundamentais da modelação matemática e as suas potencialidades para a aprendizagem. De facto, do ponto de vista da investigação, inúmeras possibilidades se abrem ao estudo e análise de aspetos relacionados com a aprendizagem neste tipo de aulas. Procurando sintetizar o que a investigação e o trabalho de muitos autores já revelaram (cf. Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007; Carreira & Baioa, 2011; Carreira, Barquero, Kaiser, Lingefjard, & Wake, 2015; English, Ärlebäck, & Mousoulides, 2016; Stillman, Blum, & Biembengut, 2015; Stillman, Blum, & Kaiser, 2017; Stillman, Kaiser, Blum, & Brown, 2013), concluo com um conjunto de notas e observações sobre as contribuições da modelação matemática e aplicações

4 Adaptado de: http://www.premierhorticultura.com/exportacion_premier_horticultura_group.html

para a aprendizagem dos alunos:

- A modelação matemática é uma atividade que *contribui para a construção de significado dos conceitos matemáticos*; os alunos, além de terem a oportunidade de perceber como os conceitos matemáticos são necessários e fecundos para resolver um determinado problema, também *encontram âncoras de análise e compreensão dos conceitos matemáticos nas próprias caraterísticas do problema* e no facto de estar relacionado com aspetos do mundo real que eles alcançam.
- O processo de modelação matemática tem como ideia chave uma permanente interação ou movimento: do mundo real para a matemática e da matemática para o mundo real. Estes dois deslocamentos são essenciais e constituem, na maioria dos casos, a maior dificuldade para os alunos. Por princípio, *perante uma tarefa de modelação, os alunos não têm qualquer ideia de qual a matemática que irão usar para realizar a tarefa.* Uma etapa importante é a da compreensão da situação real a modelar, etapa a que muitas vezes se chama *construção de um modelo real da situação.* Importa que os alunos sejam apoiados nesta etapa, sendo, por exemplo, bastante recomendável uma discussão prévia com todos os alunos sobre a forma como estão a *idealizar e compreender a situação ou o problema.*
- A modelação matemática consiste na construção de modelos de uma parte da realidade; envolve o estabelecimento de pressupostos, a simplificação da realidade e possíveis formas de a considerar. Por isso, *as tarefas de modelação matemática permitem aos alunos criar uma imagem adequada da Matemática*, em que várias soluções são admissíveis, aceitáveis e justificáveis para um mesmo problema.
- A modelação matemática anda de mãos dadas com a aplicação da Matemática; *um problema de modelação matemática tem a possibilidade de ser estendido, ampliado, ou aprofundado, em muitos e diversos sentidos*. As tarefas de modelação matemática podem ser concebidas em termos de sequências, existindo tarefas que são pensadas primordialmente para o surgimento de conceitos matemáticos novos e outras que podem ser pensadas para desenvolver e aprofundar esses conceitos.
- A modelação matemática é, evidentemente, um campo fértil para desenvolver a capacidade de resolução de problemas. E é, também, um campo importante para *fomentar o espírito investigativo dos alunos.* Numa tarefa de modelação, os alunos precisam de procurar caminhos e pistas para estabelecerem uma abordagem ao problema; precisam de interrogar e de perscrutar a realidade. Precisam, no fundo, de pôr em jogo o que conhecem sobre a situação real e de *trazer para a atividade conhecimento extra-matemático relevante, incluindo uma boa dose de intuição matemática e de senso comum.*
- As tarefas de modelação matemática são contextos ideais para promover a discussão e a troca de ideias entre os alunos. São incentivados *a perceber e a explicar decisões e assunções, e a desenvolver o seu sentido crítico.* Por exemplo, as discussões muitas vezes ditas “laterais” sobre uma dada tarefa têm-se mostrado de grande relevância por serem momentos de apuramento da consciência crítica dos alunos. Na tarefa de calibração de tomates, há excelentes oportunidades para ouvir os alunos a discutir se é razoável pagar um preço mais elevado pelo tamanho maior do tomate. Um outro aspeto que pode ser alvo de uma interessante discussão é o da escolha das unidades a utilizar e do tipo de erro ou de precisão que será sensato admitir.
- A modelação matemática pode ser favorecida e facilitada pela utilização das tecnologias digitais. Em muitos problemas, *os alunos podem completar a informação apresentada com dados e elementos que procuram na Internet.* A calculadora foi, naturalmente, um instrumento a que os alunos recorreram frequentemente na tarefa da calibração de tomates. Nesta tarefa, como se pode perceber, o recurso ao GeoGebra também oferece várias potencialidades para o aprofundamento e exploração das ideias matemáticas envolvidas.
- Os problemas de modelação matemática são, por norma, fracamente estruturados. Isto significa, como referido atrás, que as abordagens podem ser variadas entre os alunos de uma mesma turma. E também significa, regra geral, que *a capacidade de utilização de representações matemáticas é essencial.* Tem sido evidenciado pela investigação que os alunos, ao trabalharem sobre problemas de modelação, usam diversas representações, incluindo muitos esquemas, tabelas, gráficos, registos numéricos e algébricos, relações matemáticas, etc. Assim, *a modelação matemática leva os alunos, naturalmente, ao uso de múltiplas representações e à sua combinação* numa dada atividade.
- As tarefas de modelação matemática dão aos alunos a possibilidade de empreender e executar ciclos (por vezes, microciclos) de construção, validação e refinamento de modelos. Em muitas dessas iterações, *formulam conjeturas, hipóteses, ideias preliminares que posteriormente aceitam ou rejeitam.* Assim, a investigação tem mostrado que os alunos efetuam verdadeiras rotas ou trajetórias de modelação, que podem ser bastante distintas de caso para caso, *podendo os modelos obtidos atingir diferentes níveis de complexidade e de generalidade.*
- A modelação matemática tem recentemente vindo a ser considerada como uma via de trabalho consonante com uma abordagem de integração de STEM (acrónimo de *Science, Technology, Engineering, and Mathematics*). Com efeito, vários estudos têm mostrado que os alunos, mesmo no ensino básico, são capazes de trabalhar em problemas típicos

da engenharia, em que se pretende encontrar uma solução prática para um problema ou construir um protótipo. A investigação parece indicar que *a modelação matemática fica enriquecida com a implementação de ambientes de caráter experimental* em que os alunos são chamados a trabalhar em atividades práticas (*hands-on*). Esses ambientes parecem potenciar a *consciência da autenticidade dos problemas por parte dos alunos* e levá-los a compreender e sentir, de forma mais nítida, o que significa o trabalho do modelador matemático e como podem acercar-se desse trabalho na sala de aula.

Referências

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Applications and modelling in mathematics education. The 14th ICMI study.* New York: Springer.

Carreira, S., & Baioa, A. M. (2011) Students' Modelling Routes in the Context of Object Manipulation and Experimentation in Mathematics. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri R., & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, (pp. 211-220). Dordrecht: Springer.

Carreira, S., Barquero, B., Kaiser, G., Lingefjard, T., & Wake, G. (2015). Introduction to the papers of TWG06: Applications and modelling. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.790-793). Prague: Charles University and ERME.

English L. D., Ärlebäck J. B., & Mousoulides N. (2016). Reflections on Progress in Mathematical Modelling Research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 383–413). Rotterdam: Sense Publishers.

Stillman, G. A., Blum, W., & Biembengut, M. S. (Eds.). (2015). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences.* Cham: Springer.

Stillman. G. A., Blum, W., & Kaiser, G. (Eds.). (2017). *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* Cham: Springer.

Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W., & Brown, J. P. (Eds.). (2013). *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice.* Dordrecht: Springer.

Susana Carreira

Universidade do Algarve & UIDEF – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Uma experiência com peixes

A tarefa apresentada destina-se ao 8.º ano do ensino básico e pretende familiarizar os alunos com o processo investigativo em Estatística, particularmente com a realização de inferências a partir de diferentes amostras geradas por simulação, e contribuir para a compreensão das noções de distribuição e variabilidade, apoiados num software para trabalhar com dados estatísticos (*TinkerPlots*TM). Para que os alunos possam entender melhor a natureza aleatória das amostras geradas pelo processo de simulação no computador pode ser vantajoso começar por fazer uma simulação com um suporte físico, tal como é proposto na parte 1 da tarefa. Em seguida, usando uma base de dados do *TinkerPlots*TM ("Demos Fish Experiment"), os alunos fazem a simulação com amostras de diversas dimensões, analisam a sua distribuição através da construção de diagramas de extremos e quartis e podem comparar a média, mediana e amplitude interquartil para cada tipo de peixe de modo a responderem à questão colocada no início da tarefa.

Para uma familiarização dos alunos com o contexto da tarefa poder-se-á sugerir que estes façam uma pesquisa sobre a aquacultura em Portugal, de modo a enquadrarem a situação proposta numa atividade humana (http://eaquicultura.pt/aquicultura-em-portugal).

Na página da Educação e Matemática - site da APM, no *link* criado no índice deste número da E e M, pode fazer o *download* dos Cartões-Peixe, material suplementar à realização desta tarefa, que foi utilizado em aulas, conforme relato do artigo Contributos da investigação para o ensino da Estatística e das Probabilidades, na página 21 desta revista.

Ana Henriques
Hélia Oliveira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa