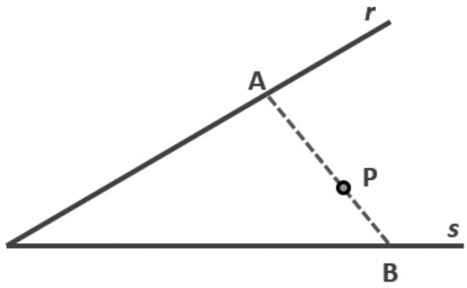
O dobro do outro

Temos duas semirretas r e s, com a mesma origem, e um ponto P entre elas. Queremos unir as semirretas por um segmento de reta AB passando por P. Onde deve ficar o ponto A (ou o B) de modo que a distância AP seja o dobro da PB?

Nota: Problema de Wayne Wickelgren, publicado no livro *How to Solve Mathematical Problems*, Dover Publications, Nova Iorque, 1995.

(Respostas até 31 de março, para zepaulo46@gmail.com)



No geoplano

O problema proposto no número 142 de *Educação e Matemática* **foi este:**

O Mário afirmou:

– Se tiver um geoplano de malha quadriculada suficientemente grande, consigo construir um triângulo retângulo em que nenhum dos lados é horizontal ou vertical e com as suas medidas a serem números inteiros! Será que o Mário tem razão?

Se sim, em área, qual é o menor desses triângulos?

Recebemos cinco respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias, Ernesto Mota (Lisboa), Luís Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Mário Roque (Guimarães).

Demos a palavra ao Carlos:

Temos que encontrar três triângulos retângulos que satisfaçam as seguintes condições:

1- Tenham lados de comprimento inteiro

2- Sejam retângulos

3- Dois deles sejam semelhantes

4- As hipotenusas desses dois sejam iguais aos catetos do terceiro.

Depois, usou uma folha de cálculo e um programa de visual basic para encontrar todos os triângulos com catetos inferiores a 1000. Por curiosidade, indica o mais "bicudo" (95, 900, 905) e o mais "parecido" a um isósceles (595, 600, 845). No fim, acrescenta:

Não me agrada o modo como resolvi este problema. OK, funcionou, mas não me agrada. Não me agrada por ser do tipo "força bruta".

Outros leitores começaram também por indicar as restrições a impor.

Como diz o Alberto:

Para que tanto os catetos como a hipotenusa do triângulo referido pelo Mário respeitem as premissas do problema têm de verificar-se duas condições:

a) A medida dos lados do triângulo têm de constituir um terno pitagórico;

b) Cada um dos catetos desse triângulo é a hipotenusa de um triângulo retângulo cuja medida dos lados constitui também um terno pitagórico.

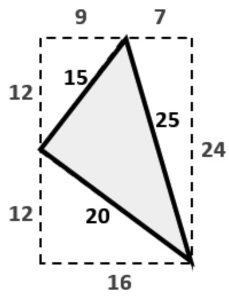
Na mesma linha de pensamento, o Luís acrescenta:

A partir dos primeiros ternos pitagóricos primitivos (3, 4, 5), (5, 12, 13), … e dos produtos destes por fatores inteiros elabora-se uma lista de ternos.

Agora, procuram-se naquela lista os dois ternos mais pequenos, cujos terceiros elementos sejam os dois primeiros de um terceiro terno; isto é, genericamente, se se tiver os ternos (a, b, c) e (d, e, f), procura-se a existência de um terceiro terno (c, f, g).

O Ernesto reforça uma das condições necessárias:

Os dois ternos pitagóricos que dão origem aos catetos do triângulo procurado (no nosso caso 9-12-15 e 12-16-20) têm de ser múltiplos de um mesmo terno pitagórico primitivo (neste caso, 3-4-5).



Para todos estes leitores, o menor triângulo nas condições impostas tem como medidas dos lados 15-20-25.

Finalmente, o Alberto vai mais longe e indica uma forma de encontrar todos os triângulos do tipo procurado:

Em geral, podemos afirmar que se representarmos por a_i-b_i-c_i e a_j-b_j-c_j ternos pitagóricos primitivos (em que i e j são números inteiros positivos, iguais ou diferentes, e representam o número de ordem do terno) e por k um número inteiro positivo, são soluções do problema os triângulos retângulos correspondentes aos ternos pitagóricos dados pela fórmula seguinte:

$$ka_ic_j\text{-}kb_ic_j\text{-}kc_ic_j$$

Por exemplo, a partir dos ternos 3-4-5 e 5-12-13 e com k=1, obtemos quer o triângulo 3x13, 4x13, 5x13 ou 39-52-65 quer o triângulo 5x5, 12x5, 13x5 ou 25-60-65

Ambos são triângulos retângulos construíveis num geoplano, sem que qualquer dos lados seja horizontal ou vertical.