Uma trajetória de aprendizagem para a classificação e definição de quadriláteros

LINA BRUNHEIRA

A coerência é um valor muito importante na matemática. A questão perturbadora sobre se um quadrado é ou não um retângulo, a que atualmente respondemos convictamente "sim" contrariando as convicções dos nossos alunos, poderia ter outra resposta: "depende". Depende de quê? Das definições que estamos a adotar para os quadriláteros. Se a nossa definição de retângulo for "quadrilátero com todos os ângulos retos", o quadrado é um caso particular do retângulo. Mas se considerarmos a definição de Euclides (Elementos, Livro I, Silva, s.d.) que afirma sobre o retângulo "E a figura, que de uma parte for mais comprida, pode ser rectangula, mas não equilatera", então o quadrado deixa de ser considerado retângulo. Euclides usava assim uma definição exclusiva que conduz a uma classificação partitiva, ou seja, que organiza separadamente os objetos, neste caso figuras geométricas. Se deixámos de adotar estas definições para alguns conceitos é porque existem várias vantagens nas definições inclusivas, como conduzirem a uma maior economia na formulação de definições ou teoremas e simplificarem a dedução de propriedades para os conceitos mais específicos (De Villiers, 1994).

Na verdade, como refere De Villiers (1994), existe uma estreita relação entre as definições e as classificações. Uma certa definição implica um tipo de classificação e uma classificação determina igualmente o tipo de definição. Mas então por onde começar? Será esta uma questão do tipo "quem nasceu primeiro, o ovo ou a galinha"? Em matemática, uma teoria começa com termos primitivos e axiomas, a partir dos quais todas as outras noções são definidas e os teoremas são demonstrados, usando as regras do raciocínio lógico. Contudo, como explica Pólya (1975), este encadeamento não reflete a forma como a matemática é criada ou como é aprendida. Do ponto de vista do ensino, De Villiers (2017) refere que persiste uma crença de que uma boa prática significa fornecer primeiro uma definição concisa do conceito, depois alguns exemplos e contraexemplos e, posteriormente, a exploração das suas propriedades. Contudo, esta abordagem conduz à ideia errada de que a criação matemática começa com definições (que os alunos não sabem de onde vêm nem como foram escolhidas) e que não existe mais do que uma definição para o mesmo conceito. Mais ainda, De Villiers considera que ao "servir" definições acabadas aos alunos se está a negar a possibilidade de se envolverem no processo de definir e a promover uma imagem da matemática como uma ciência "absolutista".

De facto, e no caso da aprendizagem das figuras geométricas, a investigação em educação matemática tem mostrado evidência que nos leva a questionar a adequação de uma abordagem que parte das definições para a organização das figuras em classes. Vários estudos sobre a aprendizagem dos quadriláteros, envolvendo alunos, professores e futuros professores, mostram que frequentemente os indivíduos conhecem as definições, mas não raciocinam de acordo com tais definições (ver por exemplo Fujita, 2012). Isto significa, por exemplo, que os alunos podem enunciar corretamente uma definição para paralelogramo sem admitir que o retângulo pertence a essa classe. Alguns investigadores, como Hershkowitz (1989), explicam que este problema se deve, em parte, àquilo a que chamam *efeito protótipo*, ou seja, a tendência para restringir os conceitos tomando apenas como exemplos alguns casos especiais e assim acrescentar atributos desnecessários ou falsos. Situações comuns que traduzem este fenómeno são frequentemente detetadas pelos professores: achar que um retângulo tem de ter lados consecutivos diferentes, assumir uma posição convencional com dois lados horizontais e dois verticais ou até considerar que os primeiros têm de ser maiores do que os últimos. Acontece que, frequentemente, é o exemplo protótipo que é usado como base do julgamento que os alunos fazem das figuras e não a sua definição ou as suas propriedades, o que resulta na classificação errada das figuras.

O que fazer então? Poderíamos pensar em contrariar a existência de protótipos, no entanto, Hershkowitz alerta também para que, habitualmente, os indivíduos não assimilam qualquer exemplo de um conceito sem que antes tenham adquirido um exemplo protótipo como referência. É certo que a exposição sistemática dos alunos a um leque restrito de exemplos contribui para reforçar a ideia de que há exemplos mais representativos do que outros mas, como refere ainda a autora, a culpa não é só dos manuais escolares ou dos professores que exibem sempre o mesmo tipo de exemplo. Esta investigadora realizou um interessante estudo com alunos do 5.º ao 8.º ano, professores e futuros professores de 1.º ciclo[1] a quem foi pedido que

1 No original, elementary teachers.

analisassem definições para dois conceitos "inventados" – os *bitrian* (figura geométrica que consiste em dois triângulos com um vértice comum) e os *biquad* (figura geométrica que consiste em dois quadriláteros que partilham um lado) – e a partir das definições escolhessem exemplos destes conceitos a partir de um conjunto de figuras que lhes foi apresentado ou construíssem eles próprios alguns exemplos. Curiosamente, os resultados revelaram que, mesmo sendo conceitos sobre os quais não tinham experiência prévia, também se observou o efeito protótipo pois os participantes tenderam a identificar muito melhor alguns exemplos relativamente a outros. Esta experiência mostra assim que a maneira como analisamos as figuras não é puramente analítica, mesmo quando partimos de uma definição, e que a forma como percecionamos visualmente as figuras tem um papel fundamental.

Deixemos a questão colocada provisoriamente em aberto e consideremos o conceito de trajetória hipotética de aprendizagem.

TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Quando planificamos o ensino de um tópico tomamos várias decisões – o que privilegiar, quais as tarefas a propor, como encadeá-las, quais os recursos a usar, quais os papéis dos alunos e professor em cada momento, etc. Ações tão comuns como a seleção e encadeamento dos exercícios ou problemas a realizar do manual refletem a perspetiva que temos sobre a forma como os alunos aprendem aquele tópico, dadas as condições existentes no momento. De certa forma, concebemos uma trajetória para a aprendizagem dos nossos alunos, informada por experiências anteriores, perspetivas mais gerais sobre o ensino e, nalguns casos, dados da investigação. Esta ideia foi desenvolvida por alguns investigadores, dando origem ao conceito de *trajetória hipotética de aprendizagem*.

Para Clements e Sarama (2004), uma *trajetória hipotética de aprendizagem* compreende três aspetos: um objetivo de aprendizagem, uma perspetiva teórica (ou modelo) sobre a progressão no pensamento e aprendizagem das crianças num determinado domínio e uma sequência de tarefas. A trajetória baseia-se num modelo de aprendizagem que é suficientemente explícito para descrever os processos envolvidos na persecução dos objetivos a atingir e concretiza-se através de uma sequência de tarefas que pretende desencadear a atividade matemática que, hipoteticamente, conduzirá à progressão das crianças. Os investigadores que concebem a sequência assumem que esta constitui um programa particularmente eficaz, mas não sugerem que é a única, ou mesmo a melhor, para atingir os objetivos definidos, até porque o currículo é determinado por vários outros fatores, como os conhecimentos que os alunos já possuem, as suas preferências e envolvimento em determinadas tarefas ou contextos. Este é, por um lado, um dos motivos pelos quais os professores podem e devem construir e/ou adaptar trajetórias de aprendizagem, pois só os próprios detêm o conhecimento mais completo sobre os seus alunos. Por outro lado, é também um dos motivos pelos quais uma trajetória será sempre hipotética, na medida em que o professor, à priori, também não pode conhecer completamente a dinâmica que será desencadeada e, consequentemente, como se processará o ensino e a aprendizagem.

Para a construção destas trajetórias, os investigadores recorrem à investigação já existente e que pode informar as três componentes da trajetória – os objetivos, o modelo de aprendizagem e a construção das tarefas. Contudo, a implementação das trajetórias constitui também um novo campo de investigação e uma oportunidade para aprofundar o conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem.

De seguida, volto à questão inicial sobre a orientação a dar para o ensino da classificação e definição de quadriláteros. Para isso, apresento a trajetória que tenho desenvolvido nos últimos anos com estudantes do 2.º ano de uma Licenciatura em Educação Básica, as ideias em que assenta e alguns resultados da investigação que poderão ser úteis aos professores que pretendam implementar ou adaptar esta trajetória no 3.º ciclo.

UMA TRAJETÓRIA PARA A CLASSIFICAÇÃO E DEFINIÇÃO DE QUADRILÁTEROS

A trajetória construída visou a aprendizagem da classificação hierárquica dos quadriláteros e sua definição. Contudo, é importante clarificar que, além do conhecimento sobre como estas figuras se relacionam e conhecer as definições, este trabalho foi valorizado na medida em que promove o raciocínio geométrico, evocando processos como a generalização e a justificação, bem como a comunicação matemática. Além disso, há ainda uma vertente relativa à natureza da matemática associada à compreensão do que é e qual o papel de uma definição. No que diz respeito ao modelo de ensino, a trajetória está fundada num ensino de tipo exploratório, onde cabe a quem aprende uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento, e numa dinâmica de aula em que se reserva um espaço significativo ao trabalho dos alunos sobre as tarefas, a par de momentos de discussão e negociação de significados (Ponte, 2005). De seguida apresento as ideias que orientaram a construção da sequência de tarefas.

Os resultados da investigação existente, já referidos anteriormente, levaram-me a questionar uma abordagem aos quadriláteros que se iniciasse com as definições. Além da ideia de que conhecer a definição de um conceito não implica raciocinar em consonância com tal definição, os quadriláteros colocam-nos ainda um outro desafio: desde crianças desenvolvemos uma grande familiaridade com alguns quadriláteros, especialmente quadrados, retângulos e losangos, sem conhecer as suas definições (e assim deve ser…) e, portanto, o nosso conhecimento sobre aquelas figuras está fortemente enraizado na nossa experiência e nas imagens visuais que incorporámos. Assim, conjeturei que o trabalho com os quadriláteros devesse alargar essa experiência, numa atividade que aliasse a vertente visual com a vertente analítica. Surge assim a primeira tarefa da sequência – a investigação das propriedades de vários quadriláteros notáveis (quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, trapézio e papagaio) com recurso ao GeoGebra. Preparei um conjunto de ficheiros[2] com construções de cada um destes quadriláteros (ver na figura 1 o exemplo do paralelogramo) e que foram disponibilizados aos estudantes.

A partir da manipulação do quadrilátero, os estudantes responderam a um conjunto de perguntas (ver figura 2) e registaram as suas conclusões numa tabela.

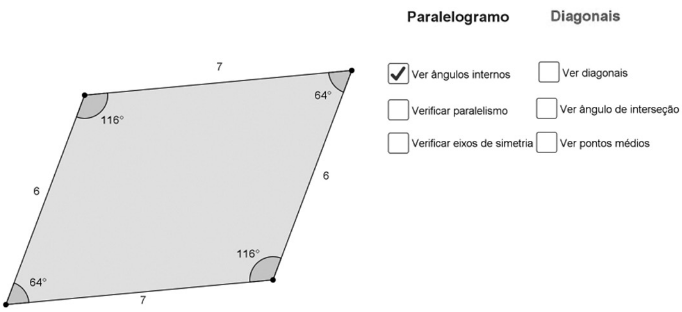

Figura 1. Imagem do ficheiro para estudo das propriedades do paralelogramo

Nesta tarefa propomos que estudes as principais propriedades dos quadriláteros mais conhecidos.

1. Vejamos o caso do paralelogramo:
   - Existem lados congruentes?
   - Existem lados paralelos?
   - Existe alguma relação entre os seus ângulos?
   - As suas diagonais são congruentes? Intersetam-se nos pontos médios (bissetam-se)? Qual é a sua posição relativa?
   - Existem eixos de simetria?

Finalmente, identifiquemos casos particulares. Por exemplo, o quadrado será um paralelogramo? E um retângulo? E um papagaio? …

Figura 2. Questões formuladas na tarefa para as propriedades do paralelogramo

A análise que efetuei sobre a atividade desenvolvida nesta primeira tarefa da sequência identificou alguns resultados interessantes e aspetos críticos a ter em atenção e que sistematizo de seguida:

- O ficheiro do GeoGebra permitiu descobrir com alguma facilidade as propriedades invariantes em análise, pois a manipulação da figura com elementos visíveis (particularmente as medidas) torna muito evidente a congruência de lados ou ângulos.
- A manipulação da figura permite alargar o conjunto de imagens visuais que os estudantes associam ao conceito, particularmente quando o quadrilátero surge em posições não convencionais ou com medidas mais "extremadas" (por exemplo, retângulos muito estreitos).

Há uma tendência geral no que respeita à atitude dos alunos face aos casos particulares: os alunos não manipulam as figuras intencionalmente para assumirem casos particulares (por exemplo, colocar o paralelogramo com a forma de um quadrado) e, quando estes surgem acidentalmente, tendem a ignorá-los por os considerarem uma espécie de erro de programação. Assim, é importante que o professor "provoque" os alunos para considerarem estes casos e começarem a refletir sobre as relações entre os quadriláteros. A discussão coletiva sobre as conclusões dos alunos constitui uma oportunidade fundamental para esta reflexão.

A primeira tarefa da sequência permitiu assim descobrir várias propriedades dos quadriláteros e começar a considerar as relações hierárquicas que surgem ao percebermos, por exemplo, que é possível construir um quadrado a partir de um retângulo ou de um papagaio. Desta forma, a classificação dos quadriláteros começa a surgir na primeira tarefa, mas ela requer um tratamento que permita sistematizar estas ideias. Surge assim a segunda tarefa que recorre a um diagrama de Venn e a um fluxograma para organizar as figuras (figura 3).

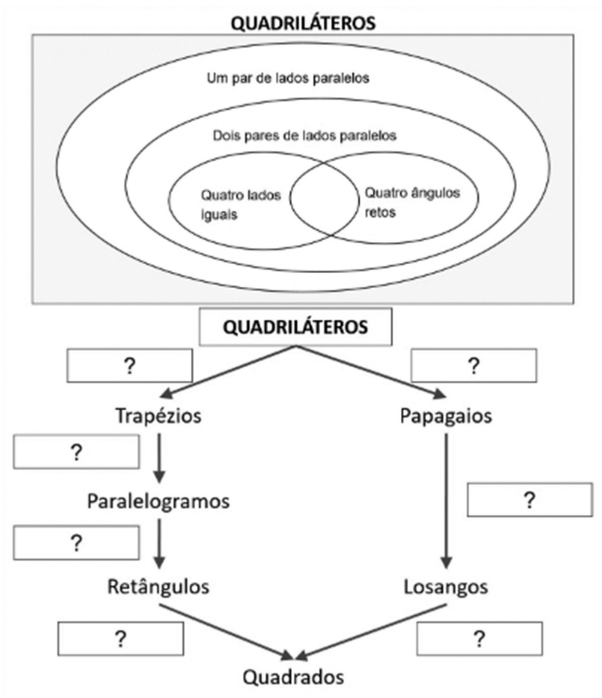

Figura 3. Diagrama de Venn e fluxograma da tarefa 2

Nesta tarefa, os estudantes começaram pelo preenchimento do diagrama de Venn de acordo com as relações que estabeleceram na tarefa 1 e prosseguiram para o fluxograma onde colocaram as propriedades que permitem transformar cada quadrilátero

2 Pode aceder a estes ficheiros em https://www.geogebra.org/search/perform/search/lina%20brunheira escolhendo o nome de cada quadrilátero que pretende estudar.

noutro, seguindo a orientação das setas. Por exemplo, o espaço que liga o papagaio ao losango foi preenchido com a propriedade "quatro lados congruentes" (que também pode ser uma definição para losango), mas surgiram também outras hipóteses como "dois eixos de simetria" ou "ângulos opostos congruentes" que, associadas às propriedades do papagaio, implicam que este se restrinja ao losango. Ainda no fluxograma, colocaram uma nova seta que completasse o esquema de forma a respeitar todas as relações encontradas, o que conduziu à ligação entre os paralelogramos e os losangos.

Da análise da implementação desta tarefa destaco os seguintes aspetos:

- A utilização de esquemas visuais como o diagrama ou o fluxograma são fundamentais para organizar e sistematizar as relações encontradas;
- O diagrama de Venn torna particularmente evidente as relações inclusivas. Neste caso, surgem algumas dúvidas a ter em conta: há alunos que tendem a repetir o mesmo quadrilátero em todas as zonas em que as propriedades sejam respeitadas (por exemplo, colocam o quadrado nas seis zonas possíveis). Este erro evidencia a necessidade de compreender que, se colocamos o quadrado fora da região definida pela propriedade "Quatro lados iguais" significa que o quadrado não respeita essa propriedade, o que é falso. Outro aspeto a realçar é a importância de assinalar quadriláteros não notáveis – o conjunto dos quadriláteros que não têm um par de lados paralelos inclui os papagaios (não losangos), mas também outros casos que não têm quaisquer propriedades a não ser os quatro lados que definem um quadrilátero.
- O fluxograma reforça as relações encontradas anteriormente e estabelece uma primeira ponte para as definições. Um aspeto que pode ser sensível é a possibilidade de preencher os espaços de mais do que uma forma, o que deve ser discutido com os alunos.
- As duas formas de organização são muito úteis, mas só se tira o verdadeiro proveito delas se o professor colocar à discussão afirmações como: "todos os quadrados são retângulos", "todos os paralelogramos são losangos" ou "todos os quadrados são papagaios". Estas três afirmações oferecem desafios de nível diferente. A primeira é facilmente aceite depois do estudo realizado; a segunda é facilmente negada, mas os alunos tendem a dizer que "os paralelogramos não são losangos, os losangos é que são paralelogramos", o que está parcialmente correto porque devemos antes dizer "nem todos os paralelogramos são losangos" – uma subtileza que pode ser compreendida aludindo a relações análogas como "nem todos os cães são dálmatas" em vez de "os cães não são dálmatas". Finalmente, a última afirmação representa o maior desafio, pois a tendência é para não aceitar que os quadrados são papagaios. Isto acontece porque as imagens protótipo de cada quadrilátero são significativamente diferentes por haver menos propriedades que são partilhadas pelas duas figuras (o que acontece noutros casos em que as relações são "indiretas").

A última tarefa da sequência trata finalmente as definições de alguns quadriláteros, mas o seu propósito é muito mais ambicioso do que apresentar definições. Pretendemos que os estudantes compreendam o que é uma definição, se envolvam na sua construção e discutam o interesse de umas definições relativamente a outras, em particular, a vantagem de chegar a definições económicas, ou seja, um conjunto de condições mínimo para definir a figura. Desta forma, a tarefa 3 (figura 4) parte das propriedades de três quadriláteros não identificados (A – paralelogramo, B – retângulo, C – papagaio) e que os alunos devem começar por reconhecer. O trabalho com as definições começa com a escolha de propriedades que determinem a figura e prossegue com uma seleção "mais económica". A sugestão da utilização de um geoplano de 11 por 11 decorre da necessidade de fazer várias experiências de construção de polígonos que respeitem as propriedades enunciadas usando um instrumento que promova o rigor da construção. A utilização de um ambiente de geometria dinâmica (AGD) é também adequado para testar tais construções.

Quadrilátero A	Quadrilátero B	Quadrilátero C
A1. Dois pares de ângulos opostos iguais A2. As diagonais bissetam-se A3. Os lados opostos são iguais A4. Os ângulos consecutivos são suplementares A5. Dois pares de lados paralelos	B1. As diagonais são iguais B2. As diagonais bissetam-se B3. Os lados são iguais dois a dois B4. Os ângulos são todos iguais B5. Dois pares de lados paralelos	C1. Lados consecutivos iguais dois a dois C2. As diagonais são perpendiculares C3. Uma diagonal bisseta a outra C4. Dois ângulos opostos iguais C5. Um eixo de simetria contendo dois vértices.

Para as questões seguintes, usa o geoplano de 11 por 11. Faz o registo em papel ponteado de algumas figuras de forma a argumentar as tuas escolhas.

2. Descobre quais são os quadriláteros designados por A, B e C.
3. Será possível definir o quadrilátero A usando apenas uma propriedade? Se sim, qual? Há mais do que uma possibilidade? E duas propriedades? Justifica as tuas escolhas.
4. Faz o mesmo estudo para os quadriláteros B e C.

Figura 4. Excerto da tarefa 3 sobre definições

Nesta tarefa destaco os seguintes aspetos:

- Depois do estudo realizado anteriormente, os alunos descobrem facilmente quais são os quadriláteros designados por A, B e C.
- O paralelogramo (A) surpreende por ser possível defini-lo usando, isoladamente, qualquer uma das propriedades apresentadas. Este caso é particularmente importante para que compreendam que podem existir definições equivalentes e discutir a razão pela qual algumas são mais adotadas do que outras (por exemplo, A5 é muito mais

comum do que A2).

- O retângulo (B) tem apenas uma possibilidade de ser definido por uma única propriedade (B4), no entanto, a conjunção de duas propriedades como as referentes às diagonais (B1 e B2) resulta também noutra definição. Se acrescentarmos qualquer outra propriedade a definição continua correta, mas deixa de ser económica – o que constitui uma oportunidade para perceber este conceito.
- O papagaio (C) apresenta uma propriedade (C5) que envolve um eixo de simetria e que permite definir o quadrilátero – uma propriedade que não é muito utilizada, mas pode ser eficaz se estivermos a construir a figura num AGD – o que mais uma vez conduz à relevância de umas definições face a outras. De registar que neste quadrilátero surge com frequência a proposta de o definir usando apenas C2 ou C3. Isto acontece porque, quando pensamos em segmentos perpendiculares, imaginamos quase sempre que um bisseta outro (e vice-versa), acrescentando assim uma propriedade sem que nos apercebamos.

COMENTÁRIOS FINAIS

Neste artigo falei essencialmente de geometria, da aprendizagem dos quadriláteros e do que nos diz a investigação sobre este assunto. Contudo, gostaria que encontrassem nele uma mensagem transversal relativamente ao ensino de qualquer tópico, seja um conteúdo, seja uma capacidade. Todos sabemos o quão importantes são as tarefas que propomos aos alunos. Exercícios, problemas, investigações, seja qual for a sua natureza, escolhemo-las pelo seu valor intrínseco, pelo potencial que encontramos em cada uma. Contudo, tão importante como a escolha da tarefa, é a sua sequenciação. Uma tarefa pode parecer-nos muito interessante, mas se não for intencionalmente enquadrada numa planificação mais ampla, onde faça sentido, e por uma prática consistente com os nossos objetivos, boa parte do seu potencial pode perder-se. Os resultados da investigação podem ajudar-nos neste aspeto e, certamente, a nossa experiência e conhecimento. No seu conjunto, são eles que apoiam a construção de trajetórias de aprendizagem.

No que respeita à aprendizagem da classificação de quadriláteros, esta será, provavelmente, um processo sempre bastante difícil. Apesar de o processo de classificar ser inerente à nossa condição humana e estar presente em tantas atividades, na verdade, há vários fatores que o tornam bastante complexo. Como afirmam Mariotti e Fischbein (1997), as classificações formais recorrem frequentemente a critérios estruturais que não são imediatamente claros e estão longe dos critérios percetuais aos quais estamos habituados a remeter a atividade espontânea de classificar.

A aprendizagem das definições dos quadriláteros não será algo tão complexo se a restringirmos à simples memorização. Contudo, a literatura mostra que saber dizer a definição não significa conhecer o conceito pois, como explica Vinner (1983), quando mobilizamos um conceito evocamos sobretudo as suas representações (imagens mentais, experiências, etc.), o que é particularmente verdade no caso das figuras geométricas em que os conceitos têm uma componente declarativa mas também uma visual.

Estas dificuldades colocam aos professores e investigadores a responsabilidade de procurarem as estratégias mais adequadas com vista à melhoria das aprendizagens. A trajetória que apresento neste artigo constitui um contributo nesse sentido. Como expliquei anteriormente a propósito do conceito de trajetória, não assumo que seja a única via ou mesmo a melhor. Também como fui referindo a propósito de cada tarefa, não é um caminho sem adversidade. Surgem várias dúvidas, questões e até controvérsias que nem sempre são fáceis de ultrapassar. Contudo, atrevo-me a dizer que qualquer outro caminho que não suscite estes problemas está a encobrir as dificuldades que os alunos têm com estes assuntos. Promover oportunidades para que sejam os alunos a construir o seu conhecimento com compreensão é um caminho desafiante e trabalhoso mas, simultaneamente, mais proveitoso do ponto de vista da aprendizagem. Aprendizagem dos alunos, sobre os conteúdos matemáticos e em torno das capacidades que queremos desenvolver, mas também do professor a quem se oferece uma janela sobre o conhecimento e o pensamento dos seus alunos.

Referências

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 81-89.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 11-18.

De Villiers, M (2017). From a golden rectangle to golden quadrilaterals and beyond. *At right angles, 6*(1), 64-69.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60-72.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry -- Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61-76.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). *Defining in classroom activities. Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219-248

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Silva, J. C. (s.d.). *Livro I dos Elementos de Euclides*. Consultado em https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/1parte.html

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Lina Brunheira

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa