Contributos da investigação para o ensino da Estatística e das Probabilidades

Ana Henriques
Hélia Oliveira

O modo como os alunos percecionam as suas experiências em Estatística, descrevendo-as muitas vezes como pessoalmente desinteressantes, revela que ainda não se verificaram mudanças significativas no modo como o ensino da Estatística e das Probabilidades é concretizado para permitir desenvolver as capacidades que são esperadas e que justificaram a inclusão desta área no currículo (Hedges & Harkness, 2017). Para nos adaptarmos com sucesso às mudanças sociais e tecnológicas que enfrentamos atualmente, é necessário encontrar formas de proporcionar aos alunos oportunidades de experienciar a prática da Estatística, a qual, por sua vez, ajuda-os a compreender o seu poder e utilidade e a tornar o seu estudo mais significativo.

Na educação estatística tem-se verificado um crescente recurso a simulações para ilustrar conceitos estatísticos e permitir aos alunos descobrirem por eles próprios importantes princípios, desenvolvendo igualmente o seu raciocínio estatístico (Lane & Peres, 2006). De facto, a disponibilidade generalizada da tecnologia, em particular a educacional, tem tornado a maioria das simulações de livre e fácil acesso.

Neste texto centramo-nos na simulação e o seu potencial para o ensino da Estatística e das Probabilidades, em particular no que respeita ao raciocínio estatístico dos alunos. Apresentamos dois exemplos que informam a utilização de simulações no ensino e aprendizagem de importantes ideias estatísticas que a investigação em educação estatística tem vindo a defender, os quais envolvem, especificamente, as ideias de variabilidade, amostragem, representações, distribuições, aleatoriedade e probabilidade.

RACIOCÍNIO SOBRE DISTRIBUIÇÕES E AMOSTRAGEM

A comparação de distribuições tem sido apontada na investigação como uma atividade de enorme importância no ensino da Estatística pelo facto de incorporar noções basilares como a de dados, variabilidade e distribuição (Biehler, Frischemeier, Reading & Shaughnessy, 2018). De facto, problemas que requerem a comparação de distribuições para dois ou mais grupos são comuns em Estatística e constituem uma oportunidade de os alunos poderem experimentar, pelo menos parcialmente, o processo de investigação estatística. Nessa atividade, é fundamental que os alunos compreendam o papel da amostragem e sejam sensíveis a aspetos relacionados com a variabilidade nos dados, passando a vê-los não como casos isolados, mas como agregados. Para tal há necessidade de pensar em contextos ricos que estimulem os alunos a desenvolver o seu raciocínio em torno dessas noções, tal como procuramos ilustrar em seguida.

Uma experiência com peixes

A tarefa *Uma experiência com peixes* (Oliveira & Henriques, 2015) parte de uma situação hipotética, enquadrada numa atividade humana (figura 1), para levar os alunos a raciocinarem sobre distribuições e amostragem ao compararem dois grupos, a partir de amostras de diferentes dimensões geradas por simulação. Para responderem à questão inicial colocada, os alunos têm de compreender aspetos importantes de uma investigação estatística, como a necessidade de dados e os fatores que podem afetar a precisão das suas inferências. Com esta tarefa pretende-se que os alunos aprofundem as noções de distribuição e variabilidade, em particular a variabilidade que resulta do processo de amostragem, apoiados num software para trabalhar com dados estatísticos (*TinkerPlots*™).

Esta tarefa foi realizada por alunos de duas turmas do 8.º ano, de duas escolas, após terem abordado o tema da amostragem, constituindo uma oportunidade de estes aprofundarem as suas ideias sobre este tópico.

> Um aquicultor tem abastecido os seus tanques-rede com um novo tipo de peixe, geneticamente modificado, fornecido por uma empresa que lhe assegurou que "o**s peixes geneticamente modificados, ao crescerem, atingem o dobro do comprimento dos peixes normais**".
> Pensas que o aquicultor pode confiar na afirmação da empresa? O que deverá ele fazer para verificar a sua veracidade?

Figura 1. Tarefa *Uma experiência com peixes* (Oliveira & Henriques, 2015)

Numa primeira fase, os alunos foram levados a pensar sobre como proceder para obter as evidências necessárias para responder à questão inicial, de modo a sensibilizá-los para a importância de averiguar a veracidade de determinadas afirmações através da exploração de dados recolhidos com esse propósito. O grande objetivo é levar os alunos a perceber como planear uma experiência estatística que permita obter evidências necessárias para verificar a veracidade da afirmação com base em dados, discutindo aspetos como: que dados são necessários e como proceder à sua recolha (onde se incluem questões relacionadas com a amostragem e os fatores que a podem afetar).

Diversos alunos afirmam a necessidade de obter informação estatística, associada às ideias de amostra, como referem Miguel e Pedro (figura 2), ou à realização de um teste, como é apontado por António (figura 3), que permita avaliar se os peixes geneticamente modificados atingem o dobro do comprimento dos peixes normais. É curioso verificar que António, tal como outros alunos destas duas turmas, parece sensível à necessidade de garantir que os dois tipos de peixe cresçam sob as mesmas condições.

Pensas que o aquicultor pode confiar na afirmação da empresa? O que deverá ele fazer para verificar a sua veracidade? Não, devia confiar. Ele devia pedir uma estatística de uma amostra um ~~um~~ ~~esperimento~~ esperimento feito pela empresa.

Figura 2. Resolução de Miguel e Pedro da Q1

Pensas que o aquicultor pode confiar na afirmação da empresa? O que deverá ele fazer para verificar a sua veracidade? O ~~Aquicultor~~ Aquicultor não pode dizer que afirmação da empresa é boa sem primeiro fazer um teste. Para verificar se a afirmação é real tem de juntar os peixes novos com os peixes modificados.

Figura 3. Resolução de António da Q1

De modo a garantir que todos os alunos compreendiam plenamente a situação, e se apropriavam do processo de amostragem, antes de iniciarem o trabalho no software, foi feita uma simulação com "cartões-peixe" (n=625), em papel. Cada cartão indicava o tipo de peixe de que se tratava (normal ou geneticamente modificado) e o respetivo comprimento. A professora fez a simulação, em grande grupo, com cada aluno a 'pescar', de um saco, um cartão-peixe, e registando o respetivo comprimento no quadro, numa representação gráfica semelhante à que surge na Parte I da tarefa (figura 4).

Este é um momento que pretende levar os alunos a ponderar sobre a necessidade de medir todos os peixes, o que seria muito demorado e dispendioso, ou optar por uma amostra que seja representativa da população, ou seja, através de uma amostra aleatória, tal como simularam. Os alunos geralmente têm opiniões muito diversas sobre a dimensão dessa amostra, o que representa uma boa oportunidade para discutir com eles que esta dimensão depende mais da variabilidade da população subjacente (no limite, se todos os peixes fossem iguais bastaria recolher um) do que da dimensão da população a estudar.

1. O aquicultor decidiu criar num tanque cerca de 625 peixes, alguns de tipo normal e outros geneticamente modificados. Quando os peixes estavam completamente desenvolvidos (fase adulta), o aquicultor identificou e mediu o comprimento de cada um deles. Na tua experiência, estes peixes são simulados por pequenos cartões (cartões-peixe), com a indicação do seu tipo (normal ou geneticamente modificado) e do seu comprimento (em centímetros).
2. Regista abaixo os dados (tipo e comprimento do peixe) relativos a um conjunto de 25 cartões-peixe que a turma 'pescou'.

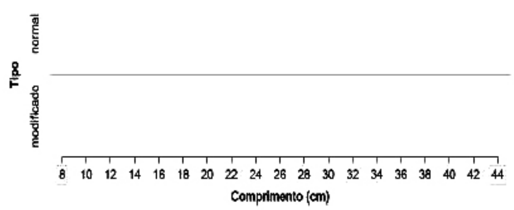

Figura 4. Questões 1 e 2 da parte I

A partir da representação gráfica, os alunos podem obter um conjunto de informações que permita a comparação dos dois grupos de peixes. Analisando as respetivas distribuições, podem atender, por exemplo, aos valores mínimos e máximos, concentração/dispersão de valores, valores centrais ou a forma da distribuição como um todo, variabilidade dos dados e a aleatoriedade do processo.

Na parte II da tarefa (figura 5), os alunos tiveram oportunidade de continuar a discussão sobre a variabilidade e representatividade das amostras, através da simulação da recolha de amostras de dimensão crescente, com o *software TinkerPlots*™, para a população que tinham considerado na parte I da tarefa. Uma das representações mais úteis para comparar distribuições de dados numéricos é o diagrama de extremos e quartis, uma vez que tal análise exige que sejam tomadas em linha de conta as características globais de cada distribuição (centro, dispersão e forma). Assim, para cada amostra simulada, os alunos analisaram a sua distribuição através da construção de diagramas de extremos e quartis focando-se na média, mediana e amplitude interquartil para cada tipo de peixe, para poderem responder à questão inicial.

1. Simula amostras de dimensão 25, 50 e 100. Para cada uma delas, constrói um diagrama de extremos e quartis e regista, numa tabela, algumas das medidas estatísticas que calculaste.
2. Com base na informação obtida, compara as distribuições obtidas para as várias amostras e responde à questão inicial. Apresenta argumentos para justificar a tua resposta que possam ajudar o aquicultor a decidir se deve manter este negócio com a empresa fornecedora.

Figura 5. Parte II da tarefa

Com a análise das diferentes amostras recolhidas aleatoriamente da mesma população, os alunos podem perceber a sua variabilidade e também que estas, geralmente, apresentam características semelhantes às da população, em particular as caraterísticas associadas ao centro da distribuição. Eles têm agora condições de usar argumentos estatísticos para fundamentar a resposta à questão inicial da tarefa.

Através das suas respostas pode depreender-se que olham para os dados como um agregado, não se centrando nos casos isolados o que poderia levá-los a afirmar que os peixes geneticamente modificados não tinham comprimento superior aos normais "porque há alguns peixes 'normais' que são maiores" (figura 6).

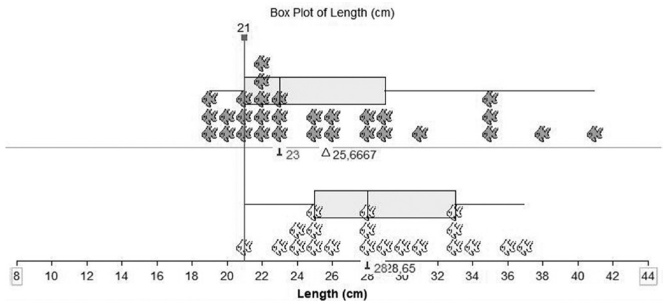

Figura 6. Diagrama de extremos e quartis por Carolina

Embora os alunos tivessem obtido os valores da média e da mediana de cada distribuição, no computador, o grupo Andreia e Gil foi um dos poucos que usou essas medidas na sua resposta à questão 2. O grupo evocou a média na comparação dos dois grupos de peixes, considerando que o aquicultor ainda teria a ganhar com o negócio pelo facto de a média do comprimento dos peixes geneticamente modificados ser superior à dos peixes normais (figura 7). Tal afirmação é corroborada pelos valores da média obtidos para as três amostras crescentes que registaram diretamente numa caixa de texto no *TinkerPlots*™.

Achamos que o aquicultor deve manter o negócio com a empresa fornecedora pois a média do comprimento dos peixes geneticamente modificados é maior do que a dos normais.

Figura 7. Resolução de Andreia e Gil da Q2 da parte II

Verificou-se, nestas turmas, uma tendência dos alunos para se focarem na amplitude interquartil para fundamentar as suas respostas, com base no que observam no diagrama, possivelmente também influenciados pelo pedido de cálculo da amplitude interquartil que é feito na tarefa. Por exemplo, Miguel e Pedro apenas se referem ao intervalo interquartil para cada grupo de peixes, a que associam, erroneamente, uma noção de "média" (figura 8). Não explicam como concluíram que o comprimento dos peixes geneticamente modificados não é o dobro do dos outros, mas ainda assim consideram que o primeiro grupo tem um tamanho superior e que o negócio pode ser vantajoso para o aquicultor.

Verifica-se, pois, que os alunos não retiraram toda a informação relevante dos vários diagramas de extremos e quartis que construíram, o que denota a complexidade associada a esta representação. Embora não sendo possível perceber como interpretam as duas distribuições, verifica-se que encontraram uma forma de acomodar a variabilidade dentro de cada grupo que permite comparar os dois grupos (ainda que com bastantes limitações), de forma a dar resposta à questão desafiante que a tarefa lhes colocou.

Com esta proposta realizada no 8.º ano pretendemos ilustrar algumas das ideias que a investigação realça como sendo as grandes apostas a considerar na educação estatística dos jovens:

– *Promover o raciocínio estatístico* é o objetivo principal a

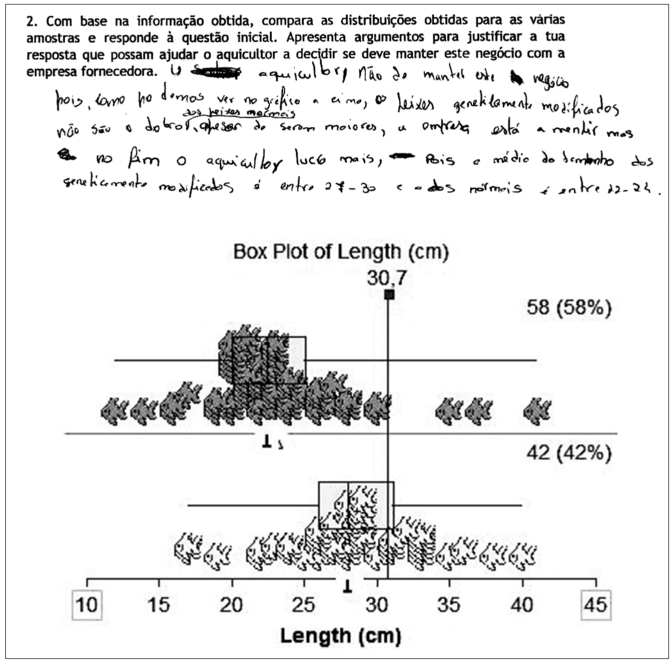

Figura 8. Resolução de Pedro e Miguel da Q2 da parte II

considerar no ensino da Estatística. Num momento em que, a partir da atividade de qualquer cidadão, são geradas enormes quantidades dados e em que estes são usados para controlar e influenciar a sociedade, é fundamental que os jovens desenvolvam a capacidade não só de interpretar e avaliar criticamente a informação estatística, mas também de tomar decisões com base nessa informação.

– *A realização de investigações estatísticas* pelos alunos contribui quer para a compreensão da Estatística como um processo investigativo para resolver problemas reais quer para explorar ideias chave deste domínio do conhecimento. Para que tal aconteça, é necessário conceder oportunidades aos alunos para experimentarem tais processos, de um modo significativo, nomeadamente, explorando o processo de amostragem.

– O ensino da estatística tem sido fortemente influenciado por abordagens vinculadas à causalidade e ao determinismo, que resultam numa tendência de não reconhecer *o papel crítico da variabilidade no raciocínio estatístico (*Meletiou-Mavrotheris & Stylianou, 2003). É importante que os alunos experienciem a omnipresença da variabilidade e que valorizem as ferramentas estatísticas como meio para descrever e quantificar essa variabilidade, ajudando-os a ter uma visão mais global da estatística (Moore, 1997).

– *O raciocínio sobre distribuições,* nomeadamente na comparação de grupos, é uma atividade central na estatística e que os alunos também podem desenvolver, a partir de contextos a que possam atribuir significado e recorrendo a *representações adequadas e poderosas.*

– Uma vez que o trabalho na Estatística *envolve lidar com conjuntos alargados de dados*, o ensino deve proporcionar também essa experiência aos alunos. *O recurso à simulação,* nomeadamente tirando partido de diversas ferramentas tecnológicas ao nosso dispor, pode constituir um importante apoio ao raciocínio do aluno.

RACIOCÍNIO PROBABILÍSTICO

É muito comum confrontarmo-nos com situações em que podemos encontrar a probabilidade de um acontecimento recorrendo à regra de Laplace. Por exemplo, escolher uma carta de um baralho, dá-nos uma chance de 1/52 de obter uma carta específica, não importa que carta tenhamos escolhido. No entanto, esta forma de proceder não é adequada para encontrar probabilidades relativas à maioria das situações de vida real, sendo exigido algo mais complexo do que a teoria clássica de Probabilidade para os resolver.

Para além disso, são amplamente reconhecidas as dificuldades que alunos e adultos enfrentam quando raciocinam sobre acontecimentos envolvendo acaso e incerteza, cometendo erros sistemáticos e persistentes na tentativa de tomar decisões sobre eles e evidenciando crenças, por exemplo sobre o lançamento de dados, do tipo 'não sai muitas vezes um seis, por isso o seis deve ser difícil de obter'. Pelo contrário, os jogadores experientes frequentemente aceitam que cada resultado é igualmente provável, pois a observação dos resultados obtidos em anos de experiência de lançamento de dados, moedas ou jogos de cartas confirmam-no (Batanero, Chernoff, Engel, Lee, & Sánchez, 2016).

Esta situação põe em evidência a necessidade de contrariar a excessiva ênfase que é dada no ensino à conceção clássica de probabilidade através da exploração dos seus diferentes significados e das relações que se podem estabelecer entre eles através de simulações, cenário que ilustramos com base na tarefa *lançamento de uma moeda.*

Lançamento de uma moeda: um exemplo

Esta tarefa foi realizada com alunos de 15 e 16 anos de uma turma numa escola da Costa Rica (Ramírez Montes, 2017). Estes alunos têm um bom desempenho académico, o que se refletiu ao longo do trabalho nas tarefas propostas em sala de aula, sendo ativos e empenhados nos desafios propostos pelo investigador.

A tarefa, que integra uma sequência de cinco tarefas construídas e realizadas para trabalhar os conceitos básicos de Probabilidade, visa introduzir o significado de probabilidade frequencista através de uma abordagem experimental, com recurso ao *Geogebra* como ferramenta de simulação, levando os alunos a inferir a lei dos grandes números e a utilizar este significado para determinar probabilidades e identificar equiprobabilidade de acontecimentos. No entanto, para uma boa compreensão de probabilidade em situações reais, é fundamental o confronto entre resultados teóricos e experimentais e, como tal, a abordagem frequencista não deve ser usada isoladamente. Assim, a tarefa também explora a articulação entre os significados clássico e frequencista de probabilidade e aborda conceitos e propriedades importantes (como aleatoriedade, variabilidade e dimensão da amostra) que podem promover o desenvolvimento do raciocínio probabilístico dos alunos e a compreensão do papel dos modelos na previsão da incerteza e da aleatoriedade.

Na introdução da tarefa, tal como mostra a figura 9, os alunos são solicitados a responderem a duas breves questões, antes de realizarem a simulação do lançamento de uma moeda. Nesta fase inicial não é dado nenhum feedback às respostas dos alunos, remetendo a sua discussão para o final da tarefa. Os alunos poderiam responder com base nas suas conceções ou experiências prévias mas, considerando que o modelo envolvido é simples e baseado em resultados igualmente prováveis (assumindo que a moeda é equilibrada), estes foram capazes de afirmar que quando uma moeda é lançada, deve sair metade das vezes cara e outra metade coroa, resultado do modelo de probabilidade clássico que já lhes foi ensinado neste nível de ensino, permitindo o confronto entre resultados teóricos e experimentais na segunda parte da tarefa. Neste caso, os alunos não evidenciaram dificuldades para calcular probabilidades por meio da regra de Laplace, nem para interpretar que esta probabilidade pode representar-se como uma fração ou percentagem.

Lançamento de uma moeda

Nesta tarefa tens a oportunidade de realizar uma experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda ao ar para calcular a probabilidade do acontecimento: "obter coroa ao lançar a moeda".

a) Se lançares uma moeda ao ar, que resultados esperas obter?

b) Qual a probabilidade dos acontecimentos:

A: obter coroa ao lançar a moeda.

B: obter cara ao lançar a moeda.

Figura 9. Introdução da tarefa *Lançamento de uma moeda*

A seguir, na parte I da tarefa (figura 10), propõe-se aos alunos uma observação e reflexão sobre o que acontece com as frequências de um acontecimento quando se repete muitas vezes uma experiência. São fornecidas instruções iniciais sobre como realizar uma simulação com a *applet* do *Geogebra*, mas não como a usar para descobrir as respostas.

A questão começa com uma moeda desconhecida, pelo que não se sabe se é equilibrada ou não. Alguns alunos revelam conhecer a regra de Laplace no início da tarefa, mas não refletem sobre a validade da sua aplicação manifestando a crença que a equiprobabilidade está sempre presente nos acontecimentos elementares e que a podem aplicar no lançamento de uma moeda, como evidencia a resolução seguinte (figura 11) de Enrique e Ricardo à alínea a) da questão1 da tarefa.

Mas a procura da resposta pretende-se experimental, pois os alunos podem examinar os dados resultantes do lançamento da moeda para decidirem se provêm de uma moeda equilibrada ou enviesada, associando a equiprobabilidade ao primeiro caso. Existem várias abordagens possíveis, incluindo lançar a moeda 5 ou 10 vezes, registar o número de caras e coroas e depois repetir

PARTE I

Abre o arquivo do *Geogebra* com nome *Lançamento de uma moeda*. Ao abrir o arquivo encontrarás diversos objetos que simulam a experiência de lançamento de uma moeda. (…) Tens agora a oportunidade de simular o lançamento da moeda.

1. Experimenta realizar várias simulações usando distintos valores de n (número de lançamentos sucessivos da moeda), clicando no botão *VariarQuantidadeDeLançamentos*, e observa o comportamento da frequência relativa dos resultados obtidos em cada simulação. Regista cada valor na folha *Registo de dados*.

Os acontecimentos sair cara e sair coroa são equiprováveis? Justifica.

b) A que valor se aproximam ou tendem as frequências relativas dos acontecimentos sair coroa e sair cara à medida que aumenta o número de lançamentos ?

Figura 10. Parte I da tarefa *Lançamento de uma moeda*

Si, porque los dos tienen la misma probabilidad de salir

[sim, porque os dois têm a mesma probabilidade de sair]

Figura 11. Resolução de Enrique e Ricardo da alínea a) da Q1

várias vezes a experiência para outro número de lançamentos. Ao compilar as frequências dos resultados, os alunos observam que quando lançam uma moeda 10 vezes, como no exemplo da figura 12, podem não obter o mesmo número (metade) de caras e coroas e que os resultados variam de aluno para aluno. No entanto, se lançarem um grande número de vezes, observam que os resultados irão começar a estabilizar para as probabilidades esperadas de 0,5 para cara e coroa (figura 12) levando-os a desenvolver interpretações de frequência relativa e a inferirem a lei dos grandes números.

A simulação do lançamento da moeda é uma experiência que produz resultados aleatórios, na qual existe sempre a incerteza de como a moeda irá cair num próximo lançamento. Observar que se o resultado de um lançamento de uma moeda é cara isso não significa que no próximo irão obter coroa, dada a natureza aleatória da experiência, favorece também o desenvolvimento do conceito de aleatoriedade. Portanto, ao observarem o que acontece num grande número de lançamentos, os alunos começam a desenvolver a noção de que embora haja incerteza e variabilidade nos resultados, estas podem ser quantificadas usando probabilidades.

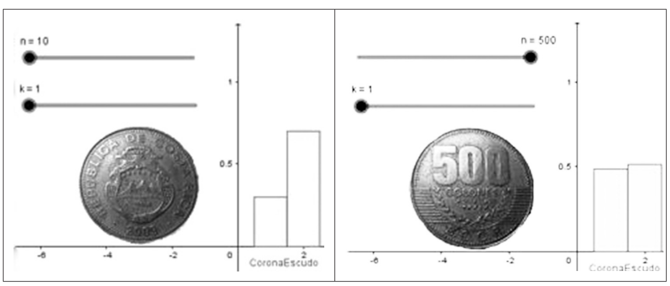

Figura 12. Simulação do lançamento de uma moeda n vezes (n=10 e n=500)

A segunda parte da tarefa (figura 13) tem o propósito de explorar as conexões entre as interpretações frequencista e clássica de Probabilidade, levando os alunos a reconhecer a variabilidade nos resultados e um padrão de tendência das frequências, estabelecendo uma relação entre o número de lançamentos da moeda e a estabilidade das frequências relativas, base para fazer boas estimações da probabilidade. É importante que os alunos compreendam que cada resultado é imprevisível e que a regularidade é apenas alcançada após um grande número de lançamentos.

PARTE II

1. A partir dos dados registados, que relação observas no comportamento dos valores das frequências obtidas na questão anterior para os acontecimentos sair coroa e sair cara à medida que o número de lançamentos aumenta, a respeito do valor da probabilidade que definiste na parte introdutória desta tarefa?

2. Com base na resposta anterior, que relação podes estabelecer entre a probabilidade teórica e a frequência relativa de um acontecimento depois de se realizar uma quantidade "grande" de n simulações de uma experiencia aleatória envolvendo acontecimentos elementares equiprováveis?

Figura 13. Parte II da tarefa *Lançamento de uma moeda*

A partir das simulações realizadas, os alunos desenvolvem a noção que quanto mais vezes se repetir um fenómeno aleatório mais próximos os resultados estarão do modelo matemático esperado (figuras 14 e 15), tendo sido capazes de inferir corretamente a lei dos grandes números como limite das frequências que tende para a probabilidade teórica ou clássica.

Los valores se mantienen entre 40-60%. Mientras aumenta la cantidad de lanzamientos, más cercana a 50% se vuelve la frecuencia.

[Os valores mantêm-se entre 40% e 60%. Quanto mais aumenta a quantidade de lançamentos mais perto de 50% está a frequência]

Figura 14. Resolução de Afonso e Leonardo da Q1, parte II

En una cantidad grande de ensayos, la frecuencia de los eventos va a ser muy parecida a la probabilidad teórica.

[Numa quantidade grande de ensaios, a frequência dos acontecimentos vai ser muito parecida à probabilidade teórica]

Figura 15. Resolução de António e Marcos da Q2, parte II

Esta tarefa, e os breves excertos que apresentámos do trabalho dos alunos na sua resolução, permitem exemplificar o que a investigação tem vindo a defender para o ensino da Probabilidade, contribuindo para desenvolver nos alunos uma maior intuição e o seu raciocínio probabilístico, o qual é visto como relevante para a tomada de decisões na vida real por se referir a julgamentos e tomada de decisão sob incerteza.

– A aprendizagem da Probabilidade envolve um raciocínio "distinto do lógico-determinista que é característico de outras áreas da Matemática" (Sánchez & Valdez, 2017, p. 128), não sendo favorável um ensino que enfatize a conceção clássica de probabilidade sem atender *à sua articulação com outras conceções*, como a frequencista.

– A Probabilidade é vista como ferramenta essencial na Estatística, o que requer *diferentes abordagens* e tipos de raciocínio. Por isso, deve ser introduzida de duas formas; como um valor teórico do grau de confiança que podemos atribuir a um resultado ou pode ser definida após a observação da frequência relativa.
– - A evolução do ensino através de atividades experimentais, a crescente atenção dada à análise de dados e o desenvolvimento de *software* educativo com capacidades dinâmicas (por exemplo, *Applets*, *Geogebra* ou *TinkerPlots*™), permitiu a *introdução experimental da noção de probabilidade* baseada em observações do fenómeno de estabilização de frequências relativas de um evento associado a uma experiência aleatória (Chaput et al., 2011).
– O *método de simulação* constitui uma boa forma de introduzir a Probabilidade, desde os níveis mais elementares, destacando-se o seu potencial para explorar os seus distintos significados e raciocínios mais intuitivos, evitando que os alunos consolidem ideias erradas (Batanero et al., 2016). Este processo também permite explorar importantes conceitos e propriedades (por exemplo, aleatoriedade, variabilidade, tamanho da amostra, lei dos grandes números) que são de difícil compreensão para os alunos mas que podem ajudá-los a desenvolver o seu raciocínio probabilístico e a compreender o papel dos modelos na previsão da incerteza e da aleatoriedade.
– Embora o recurso à simulação possa tornar a aprendizagem mais fácil e divertida, deve evitar-se o uso de simulações em que os alunos sejam observadores passivos ou tenham acesso a uma simulação sem lhes fornecer estrutura suficiente para descobrirem eles próprios os princípios importantes. Uma abordagem em que os *alunos são questionados* antes de interagir com a simulação e depois usam-na para confirmar as suas respostas parece ser efetiva nas suas aprendizagens (Lane & Peres, 2006).
– Um cenário promissor para ir ao encontro da necessidade de aprofundar o ensino da Probabilidade é enfatizar os seus diferentes significados, explorando o raciocínio ligado às conexões entre a probabilidade teórica e a estimação frequencista da probabilidade num ambiente de modelação através de simulação, que surge como o elemento integrador de propostas desta natureza (Batanero et al., 2016; Chaput et al., 2011).

A TERMINAR

Os exemplos aqui apresentados espelham intencionalidades na construção de tarefas que decorrem de resultados da investigação, tendo sido elas próprias aplicadas na sala de aula, com o objetivo de compreender em que medida promovem o raciocínio dos alunos e assim refletir sobre a sua adequabilidade à realidade escolar. Como vimos, estes alunos revelaram diversas dificuldades, mas não se pode esperar um caminho linear para o desenvolvimento de capacidades cognitivas de nível superior, como é o caso do raciocínio estatístico, especialmente quando estas não são valorizadas, de um modo consistente, ao longo da escolaridade. Levantam-se muitos desafios à investigação e, principalmente, ao professor no seu dia a dia, contudo, pequenos passos positivos devem motivar-nos a trabalhar em conjunto para que estes possam multiplicar-se e, assim, tornar mais significativas as experiências dos nossos alunos no campo da estatística.

Referências

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability,* ICME-13 Topical Surveys. DOI 10.1007/978-3-319-31625-3_1

Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2018). Reasoning about data. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp.139-192). Springer. DOI 10.1007/978-3-319-66195-7

Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 85–95). New York: Springer.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., et al. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria. VA: American Statistical Association. http://www.amstat.org/ Education/gaise/.

Hedges & Harkness (2017). Is GAISE evident? college students' perceptions of statistics classes as "almost not math". *Statistics Education Research Journal,* 16(1), 337-356. http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ.

Lane D. M. & Peres S. C. (2006). Interactive simulations in the teaching of statistics: Promise and pitfalls. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics [CD-ROM].* Voorburg: International Statistical Institute.

Meletiou-Mavrotheris, M., & Stylianou, D. (2003). On the formalist view of mathematics: Impact on statistics instruction and learning. *Proceedings of Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Available at http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG5/papers_doc/TG5-Meletiou.doc.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: the case of Statistics. *International Statistical Review,* 65(2), 123-165.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Oliveira, H., & Henriques, A. (2015). *Raciocínio estatístico com tecnologia: Propostas para o ensino básico.* Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (ISBN: 978-989-8753-17-5)

Sánchez, E., & Valdez, J.C. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 711, 127 – 143.

Ramírez Montes, G. (2017). *A aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade com recurso ao Geogebra: um estudo com alunos da Costa Rica* (Dissertação de mestrado). Universidade de Lisboa, Portugal.

Ana Henriques
Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa