O desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial *

O raciocínio geométrico e espacial são indissociáveis, afirmação que justifica a escolha do título deste artigo, escrito com o propósito de apresentar as ideias poderosas que a investigação educacional tem trazido ao ensino da geometria. O ponto de partida é a ideia de que o raciocínio geométrico se constrói e que os alicerces desta construção são determinantes para toda a aprendizagem da geometria subsequente. A sua orientação é a procura da conciliação de um ensino da geometria baseado no rigor do raciocínio geométrico com o sentido das formas e das relações geométricas. Assim, embora as ideias apresentadas se foquem principalmente na educação básica, ele cobre toda a aprendizagem da geometria. A orientação do texto não enveredou por uma abordagem temática da geometria e não há referências a nenhum tema em particular. É um texto naturalmente incompleto em que procurei responder a um desafio de forma também desafiadora.

O texto está organizado em três pontos encadeados, sendo que o último constitui uma espécie de conclusão: I) Aspetos específicos do ensino e aprendizagem da geometria; II) Resultados decorrentes da investigação neste domínio; III) Desafios que se colocam hoje à investigação.

O ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA — ALGUNS ASPETOS ESPECÍFICOS

O mundo da geometria está a mudar e os últimos anos têm dado um novo brilho a este campo do conhecimento matemático, afirma Joseph Malkevitch. Para este matemático, a geometria, que ao longo da história se desenvolveu entre o interesse na descrição do mundo físico e a construção de sistemas axiomáticos, passou hoje do ramo da matemática dedicado ao estudo das formas e do espaço, para o ramo da matemática que estuda os fenómenos visuais (Malkevitch, 2009).

Podemos considerar a geometria como uma rede complexa de conceitos, formas de pensar e sistemas de representação que são usados para analisar e imaginar ambientes espaciais (Battista, 2007). Michael Battista afirma que "a maior parte do raciocínio geométrico é espacial, considerando este tipo de raciocínio como a habilidade para ver, analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações" (2007, p. 843). Este investigador destaca o papel das imagens ao serviço de outras operações mentais e afirma que o raciocínio espacial proporciona, simultaneamente, a entrada e os instrumentos para o raciocínio geométrico formal.

A geometria lida com objetos que podem ter uma existência física, com os quais podemos interagir, e estuda também os processos de interação com esses objetos. É decisivo ter presente que os objetos físicos, com existência palpável ou desenhos, são sempre representações dos objetos geométricos (figura 1). Esta caraterística específica do conhecimento matemático distingue-o de todas as outras formas de conhecimento, conferindo à visualização e à representação um papel essencial na compreensão matemática.

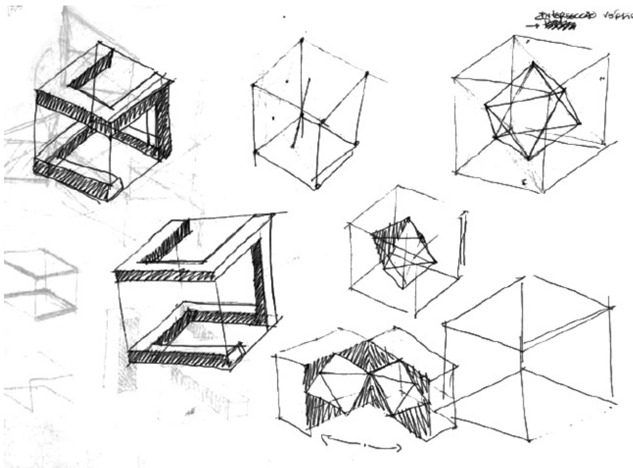

Figura 1. Desenho de um cubo, in "Desenho – Perceção e investigação Formal" de António Olaio, Coimbra 2016

O raciocínio espacial, nos níveis iniciais do raciocínio geométrico, está limitado ao nível superficial das ideias visuais. É reconhecido que um dos aspetos mais importantes da educação matemática das crianças é que estas desenvolvam, de modo crescente e integrado, representações que sintetizem imagens flexíveis e conceptualizações geométricas (Sarama e Clements, 2009), constituindo assim o seu reportório de imagens pessoal, progressivamente mais rico, diversificado, flexível e dinâmico. Além disso, deve ser dado ênfase aos processos pelos quais os alunos progridem da análise de figuras particulares para abstrações gerais de classes de figuras, bem como, aos mecanismos que permitem usar conceitos geométricos abstratos e formais para analisar figuras particulares (Battista, 2007).

Investigar sobre os vários tipos de raciocínio geométrico implica investigar sobre os vários aspetos do raciocínio espacial que lhe estão associados. Esta caraterística do raciocínio geométrico tem orientado o foco da investigação em geometria principalmente para os processos cognitivos. Embora a natureza social da aprendizagem seja hoje considerada como um dos aspetos mais relevantes no ensino, é reconhecido que poucos estudos têm examinado a aprendizagem da geometria nesta perspetiva. Mantém-se ainda hoje a afirmação de que os investigadores ainda não sabem o suficiente sobre como as várias componentes da prática social influenciam a construção pelos alunos dos conceitos e raciocínio geométricos, muito embora a investigação neste domínio tenha vindo progressivamente a integrar as dimensões de comunicação matemática e as perspetivas sociais da aprendizagem (Battista, 2007; Jones & Tzekaki, 2016).

É amplamente afirmado que a maior parte da investigação atual no ensino e aprendizagem da geometria está focada na utilização de ambientes computacionais (Battista, 2007; Jones & Tzekaki, 2016). Esta atração, a expressão é do próprio Battista, leva alguns autores a tentar compreender porque razão o ensino e a investigação em geometria abraçaram a tecnologia talvez mais entusiasticamente do que qualquer outra área da educação matemática. Um dos aspetos identificados está precisamente na riqueza que os ambientes de geometria dinâmica (AGD) proporcionam ao processo de fazer geometria, permitindo a cada um explorar ideias geométricas de modos diferentes, e indiscutivelmente melhores, do que explorações de papel e lápis, ampliando significativamente a habilidade para examinar grandes conjuntos de exemplos rigorosamente construídos, infundindo movimentos dinâmicos às investigações (Battista, 2007).

Interdependência entre raciocínio geométrico e raciocínio espacial, com envolvimento da visualização, necessidade de maior atenção ao papel dos aspetos sociais da aprendizagem e o recurso a ambientes digitais são três circunstâncias específicas da investigação sobre o ensino e aprendizagem da geometria, que ajudam a compreender a situação atual da investigação neste domínio.

IDEIAS DECORRENTES DA INVESTIGAÇÃO NO DOMÍNIO DA GEOMETRIA DETERMINANTES PARA O CURRÍCULO E PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Destaco quatro ordens de ideias chave como basilares para pensar o ensino da geometria hoje, seja do ponto de vista curricular ou das práticas de ensino: a) a estruturação do raciocínio geométrico; b) a ligação 3D-2D; c) as tarefas e os recursos, d) o desenvolvimento do raciocínio geométrico do professor.

O modelo de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio geométrico é considerado como o melhor e um dos mais significativos para descrever como é que os alunos constroem conceções matemáticas (Sfard & Cobb, 2014). Este modelo, desenvolvido a partir do fim dos anos cinquenta, tem como ideia base fundamental o pressuposto de que o raciocínio geométrico evolui segundo níveis de compreensão de complexidade crescente, passando sucessivamente desde o nível de visualização pela análise, abstração, dedução e rigor. Segundo a teoria de van Hiele, o progresso do raciocínio geométrico faz-se por níveis discretos, sequenciais e hierárquicos. Este modelo é consistente com a perspetiva construtivista da aprendizagem e constitui uma teoria útil para entender o progresso a fazer pelos estudantes à medida que o seu raciocínio geométrico se desenvolve (Battista, 2008).

Existe um consenso de que o objetivo destes níveis não seja o de classificar o raciocínio de cada estudante. Os descritores que caraterizam cada nível são úteis para identificar aspetos importantes do raciocínio geométrico e devem ser considerados como guias para o ensino que o professor se propõe fazer. Para desenvolver as capacidades de raciocínio inerentes a um nível é necessário ter em consideração o desenvolvimento de capacidades e conceitos inerentes a um nível anterior. Por exemplo, para compreender a classificação de uma figura geométrica (terceiro nível, abstrato/relacional) é necessário ser capaz de caraterizá-la tendo em conta as suas propriedades, descrevendo as relações espaciais entre as componentes da figura (segundo nível, descritivo/ analítico). É precisamente entre estes dois níveis que se situam os conceitos geométricos fundamentais da geometria elementar próprios da educação básica. Tem sido identificado pela investigação que muitos estudantes no final da educação básica não apresentam indicadores de desenvolvimento do seu raciocínio geométrico inerentes ao terceiro nível, e muitas vezes nem sequer inerentes ao segundo.

No que respeita aos níveis mais exigentes, facilmente se compreende que estejam relacionados com a escolaridade mais avançada. O quarto nível, dedução, é inerente à capacidade de elaborar uma sequência de afirmações que justifique uma conclusão como consequência dos dados de partida. E o quinto nível, rigor, inerente à capacidade de compreender o próprio sistema axiomático.

Num dos artigos mais recentes da autoria do próprio van Hiele, este investigador afirma que “pensar sem palavras não é pensar” e que o desenvolvimento do raciocínio geométrico depende mais do ensino e das experiências vividas do que da idade ou de qualquer outro tipo de maturidade do aprendente. Para van Hiele, o ensino deve promover o desenvolvimento do raciocínio geométrico através de sequências de atividades que possibilitem a integração progressiva de novas aprendizagens no conhecimento que o estudante já possui (van Hiele, 1999).

Ao longo dos anos este modelo tem sido estudado, melhorado, aplicado e desenvolvido, dando também origem a outros modelos. No entanto, as suas ideias fundamentais permanecem. O modelo de van Hiele é considerado ainda hoje como particularmente robusto e com impacto e influência na investigação e na aprendizagem (Sfard & Cobb, 2014). Segundo estes autores, a identificação do papel do ensino na mudança cognitiva e o foco na linguagem como o principal fator dessa mudança contribuem para a facilidade de conciliação deste modelo com as abordagens centradas no desenvolvimento da comunicação matemática.

Um dos desenvolvimentos do modelo de van-Hiele é o modelo de estruturação de Battista que constitui uma orientação muito útil do ponto de vista didático. Este investigador, a partir de experiências de aprendizagem realizadas com o recurso a AGD, desenvolve a ideia de que a aprendizagem da geometria tem por base o conceito chave de estruturação, sendo esta de três tipos: estruturação espacial, estruturação geométrica e estruturação lógico formal (2008, p. 138).

A estruturação espacial, entendida como a operação mental de construção e organização no espaço de uma forma ou objeto, ou de um conjunto de objetos, determina a perceção do objeto e integra a identificação de componentes do objeto e o estabelecimento de relações entre componentes e compósitos. Por exemplo, o mesmo objeto geométrico, o paralelepípedo, admite mais do que uma estruturação espacial. Pode ser encarado como um sólido compacto em que se destacam seis faces retangulares, como uma pilha de retângulos todos iguais sobrepostos, como uma estrutura oca na qual se destacam as arestas, ou como uma superfície desmontável composta por três pares de retângulos iguais. Ao ler cada uma destas quatro descrições diferentes, propositadamente apontadas aqui sem qualquer representação visual associada, idealizamos uma imagem mental do paralelepípedo. No primeiro caso a melhor imagem é a de um sólido de madeira, no segundo, de uma resma de papel ou de um pacote de bolachas cream craker, no terceiro, de uma estrutura feita com palhinhas ou, mais sofisticadamente, com polydrons, e, no quarto, de uma caixa de cartão facilmente planificável. Qualquer destas estruturações espaciais do paralelepípedo nos remete para características distintas deste poliedro, todas elas importantes e necessárias para a sua conceptualização geométrica. Percebemos que a estruturação espacial do paralelepípedo não se esgota numa única imagem, física ou mental, e que todas elas poderão ter um papel distinto. Além disso, rapidamente também percebemos que há outras estruturações possíveis, por exemplo, a disposição de um conjunto de cubos todos iguais, dispostos em camadas iguais que são formadas pelo mesmo número de barras iguais.

A estruturação espacial é condição indispensável à compreensão e estruturação das medidas geométricas de comprimento, área e volume e das relações entre elas (Sarama & Clements, 2009).

A estruturação geométrica descreve a estruturação espacial em termos de conceitos de geometria formal. Isto é, na estruturação geométrica de uma situação espacial, o sujeito usa os conceitos de geometria como ângulos, declive, paralelismo, comprimento, retângulo, sistemas de coordenadas e transformações geométricas, entre outros, para conceptualizar e operar sobre uma dada situação. Para que a estruturação geométrica faça sentido para alguém, ela terá que evocar uma estruturação espacial adequada.

Por exemplo, para relacionar os elementos faces, arestas e vértices de um paralelepípedo, a estrutura espacial a evocar deve ser a estrutura de polydrons. Para identificar o paralelismo das faces do paralelepípedo é significativo evocar uma pilha de retângulos justapostos.

Por fim, Battista considera a estruturação lógico formal, na qual se organiza os conceitos geométricos ou as estruturas geométricas num sistema e que especifica as relações que podem ser descritas e estabelecidas através de raciocínio lógico. Para chegar à estrutura lógica, o indivíduo deve organizar logicamente conjuntos de propriedades.

Seguindo o exemplo dos paralelepípedos, é nesta estruturação que encaramos o cubo como um paralelepípedo. Para o fazer percebe-se o sentido de evocar uma pilha de retângulos justapostos ou uma superfície desmontável formada por três pares de retângulos iguais e associar a qualquer destas imagens, pilha ou planificação, o quadrado como elemento da classe dos retângulos. Deste modo organiza-se a classe dos paralelepípedos numa perspetiva inclusiva, de classes hierarquicamente integradas em outras classes.

Este exemplo ajuda-nos a compreender a importância destes três tipos de estruturação e a utilidade destas ideias para a elaboração de tarefas de aprendizagem e para o planeamento do ensino. O exemplo ilustrativo do paralelepípedo foi escolhido intencionalmente por apontar um outro aspeto determinante na estruturação geométrica, a ligação 3D-2D.

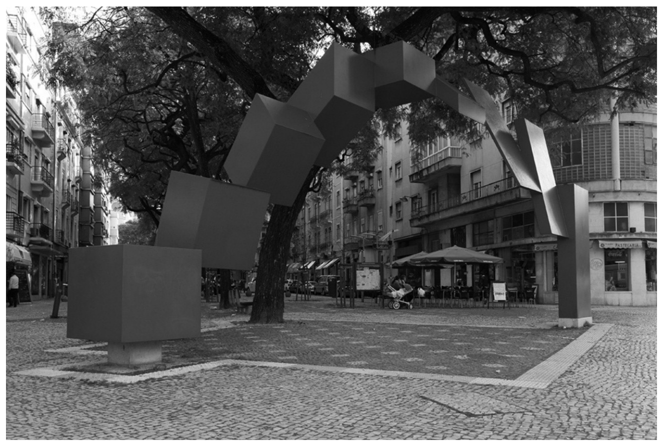

Figura 2. Foto de escultura de arte pública de Artur Rosa (Lisboa)

"— São quadrados.
— Mas também retângulos.
— Há retângulos de grossuras diferentes, um é mais grosso, outro é médio e o outro é fino."

Estas afirmações de três crianças são um excerto de um diálogo, ocorrido no jardim de infância, a partir da observação da uma escultura composta por paralelepípedos de várias dimensões, com espessuras vincadamente diferentes, em que dois deles são aproximadamente cubos (figura 2). Este diálogo serve para introduzir a discussão do lugar relativo das figuras 2D e 3D, uma das questões que se coloca sempre na organização do ensino e aprendizagem da geometria. Deverão ser as figuras 3D encaradas primeiro que as outras, pelo facto dos objetos tridimensionais serem mais familiares para as crianças? Johnston-Wilder e Mason (2005) respondem a esta questão ao defenderem que tanto a geometria sólida como a plana devem ser ensinadas de modo integrado. O que é importante, é que o foco seja o raciocínio geométrico e este exige tarefas que envolvam os alunos em manipulações apropriadas, que proporcionem oportunidades para dar sentido às relações e para ver essas propriedades como invariantes, independentes de uma situação particular, e passar a raciocinar com base nessas propriedades.

Segundo Jones e Tzekaki (2016) a investigação tem mostrado que as dificuldades dos alunos em visualizar e explicar os seus raciocínios podem ser devidas à falta de experiências prévias e ao débil desenvolvimento de imagens mentais. Ideia que confere uma relevância especial à tridimensionalidade e à necessidade de a articular com a bidimensionalidade. Os objetos reais são maioritariamente tridimensionais e muitos desenhos a duas dimensões são representações de objetos tridimensionais. Ainda segundo estes investigadores, os resultados de estudos em que as tarefas espaciais combinam figuras geométricas 2D e 3D, apoiadas por ferramentas tecnológicas relevantes, contribuem para o desenvolvimento das capacidades e do conhecimento inerentes ao raciocínio geométrico e espacial, confirmando assim o importante papel dos ambientes tecnológicos no desenvolvimento deste raciocínio.

A perspetiva de estruturação que discutimos aponta para a necessidade de ir conjugando ao longo da escolaridade tarefas que combinem o desenvolvimento do raciocínio geométrico com o desenvolvimento do raciocínio espacial, associados sempre à visualização. E tendo também sempre presente a natureza abstrata dos objetos e conceitos geométricos e a necessidade de que eles e as ações sobre eles se sustentem num universo pessoal de imagens mentais ricas e dinâmicas. A investigação tem mostrado (Jones & Tzekaki, 2016) que a visualização é um requisito para demonstrar e resolver problemas em geometria. Tanto as representações visuais como o processo pelo qual estas se desenvolvem são indispensáveis para a obtenção de soluções e para construção de demonstrações. No entanto, estes investigadores consideram que ainda são limitadas as pesquisas que relacionam a visualização com o desenvolvimento de processos criativos, muito embora afirmem que os AGD e o recurso a tecnologias digitais oferecem novas possibilidades para o estudo da visualização de objetos geométricos.

Estas orientações conduzem-nos naturalmente a encarar o professor, o principal responsável por orquestrar o ensino. Para isso retomo o modelo de van Hiele, pois uma das suas caraterísticas mais significativas é que ele se aplica a qualquer aprendente. Este aspeto explica a importância que este modelo tem tido na compreensão do desenvolvimento do raciocínio geométrico dos professores e tem influenciado muita da investigação sobre a sua formação neste domínio. É por isso que é adequado comparar a investigação sobre o conhecimento geométrico dos professores recorrendo aos mesmos referenciais usados para compreender o conhecimento geométrico dos estudantes. Jones e Tzekaki afirmam que, "com base nos mesmos referenciais, a investigação sobre o conhecimento dos professores sobre diferentes ideias geométricas tem vindo a apresentar baixos níveis de compreensão geométrica" (2016, p. 139). Para estes investigadores esta conclusão aponta para a necessidade de melhorar a formação de professores e de realizar estudos com propostas que incluam tarefas relevantes, software específico e exploração de abordagens de ensino.

DESAFIOS QUE SE COLOCAM HOJE À INVESTIGAÇÃO NO DOMÍNIO DA GEOMETRIA

Um das mais importantes áreas de investigação, tanto para a prática de ensino como para a produção de conhecimento, está no estudo dos processos que permitem aos estudantes avançar da sua estruturação espacial pessoal, idiossincrática e auto inventada, para a estruturação geométrica formal (Battista, 2008; Jones & Tzekaki, 2016). Este avanço deve ser encarado de forma progressivamente refinada, com uma orientação recursiva e adaptada à acessibilidade dos conceitos geométricos apropriados em cada momento.

De certo modo é como se encarássemos a aprendizagem da geometria como um caminho a percorrer, com duas vias lado a lado, a da estruturação espacial e a da estruturação geométrica na qual está incluída a estruturação lógico formal. As duas vias vão estabelecendo cada vez mais ligações entre si. A via da estruturação espacial é uma espécie de alicerce da estruturação geométrica. Não faz sentido que os conceitos geométricos formais, com uma forte natureza abstrata, sejam trabalhados sem uma sólida estruturação espacial.

Ao defender a acessibilidade conceptual como dependente de uma boa rede de estruturação dos conceitos, tanto espacial como geométrica, que progressivamente se vai complexificando, Michael Battista defende também a dependência das interações sociais que se estabelecem na sala de aula à medida que o ensino proporciona os andaimes para a construção dessa rede. É precisamente ao professor que compete proporcionar as condições para a construção dessa rede de estruturação.

Este investigador evidencia o interesse em conhecer os tipos de salas de aula que promovam a valorização, pelos estudantes, de justificações cada vez mais sofisticadas em geometria, bem como os processos sociais que ajudam a desenvolver esses progressos. E preconiza a necessidade de investigação sobre como os fatores afetivos estão relacionados com a aprendizagem da geometria, nomeadamente o interesse em saber qual o sentido que os estudantes dão às ideias comunicadas por outros quando estas ideias são discrepantes das suas próprias ideias ou, sendo consistentes com as suas, são expressas numa linguagem ou raciocínio diferentes.

Podemos concluir que a investigação tem proporcionado ideias e instrumentos poderosos para melhorar o ensino e aprendizagem em geometria e, simultaneamente, que há muito por estudar e conhecer neste domínio. Apesar de no nosso país a investigação neste âmbito não ser a mais relevante ao nível de doutoramentos e de projetos de investigação institucionais ou de grupos de investigadores, este domínio de estudo tem tido uma presença significativa em projetos e dissertações de mestrado realizadas em Portugal. Este facto indicia seguramente interesse neste domínio e um potencial de trabalho colaborativo entre professores de matemática e educadores matemáticos.

Todo o raciocínio espacial e muito do raciocínio geométrico não são exclusivos da Matemática e destaco a sua importância nas Artes Visuais. Importa evidenciar este aspeto no momento atual em que se discute a flexibilidade curricular e em que se desenham condições mais favoráveis para o desenvolvimento de projetos curriculares interdisciplinares. Matemática e Artes Visuais são seguramente uma boa aliança.

Para terminar convido-o a fechar os olhos. Durante uns minutos pense apenas em paralelepípedos procurando exaustivamente percorrer o seu banco pessoal de imagens. Depois procure na internet imagens do trabalho do escultor português José Pedro Croft e desafie um colega de Artes Visuais para realizar um projeto de geometria, seja com crianças do pré-escolar ou com alunos do ensino básico ou secundário.

Referências

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In Frank K. Lester, Jr. (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 843-908. NCTM.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry world. In Glendon W. Blume & M. Kathleen Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 - Cases and Perspetives,* (pp. 131-156). NCTM & IAP.

Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry.* London: The Open University.

Jones, K. & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* 109-149. 2016, Sense Publishers.

Malkevitch, J. (2009). What Is Geometry? In Timothy V. Craine e Rubenstien Rheta (Eds.), U*nderstanding Geometry for a Changing World. 71th NCTM Yearbook: 3-16.* Reston: NCTM.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children.* New York: Routledge.

Sfard, A & Cobb, P. (2014). Research in mathematics education: What can it teach us about human learning? In R. Keith Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences, Edition: Second.* pp. 545-564. DOI:10.1017/CB09781139519526.033.

van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, fevereiro 1999, 5*(6), 310-316. NCTM.

Notas

* O título deste artigo coincide com o nome de um capítulo do Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, de 2007, da autoria de Michael Battista. Duas razões presidiram a esta escolha. A primeira é o reconhecimento de que raciocínio geométrico e espacial são indissociáveis, a segunda razão, mais afetiva, prende-se com a importância que reconheço às ideias deste educador matemático.

** Agradeço aos professores que, numa fase de finalização, leram este artigo e deram sugestões significativas para a sua melhoria.