PERFEIÇÕES NUMÉRICAS

A Graça encontrou três números naturais que cumprem estas condições:

- A diferença entre quaisquer dois deles é um quadrado perfeito.
- A soma dos três números é um quadrado perfeito.
- O maior dos números é o menor possível.

Quais são os números da Graça?

(Respostas até 31 de dezembro, para zepaulo46@gmail.com)

PONTOS E CIRCUNFERÊNCIAS

O problema proposto no número 141 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

> *Temos quatro pontos do plano, não colineares três a três e não pertencentes a uma mesma circunferência.*
> *No máximo, quantas circunferências equidistantes dos pontos podem existir?*
> *E no mínimo?*

Recebemos apenas quatro respostas: Carlos Dias, Graça Braga da Cruz (Ovar), Mário Roque (Guimarães) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

PRIMEIRA QUESTÃO

A Graça começa por fazer as seguintes considerações:

Como os quatro pontos não pertencem à mesma circunferência, então a sua posição relativamente a uma circunferência de que sejam equidistantes pode ser:

Hip 1. Três no interior da circunferência e um no exterior (ou vice-versa);

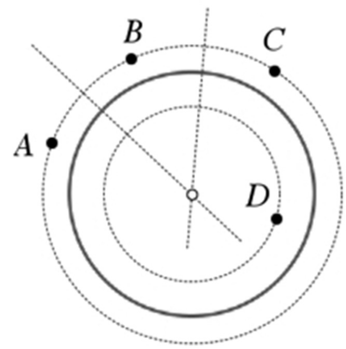
Hip 2. Dois no interior e dois no exterior.

Hipótese 1 – Quatro casos:

ABC-D	ABD-C
ACD-B	BCD-A

Como descreve o Carlos, os passos a seguir em cada um destes casos são sempre os mesmos. Por exemplo, para ABC-D, seria:

- *Traçam-se as mediatrizes dos segmentos AB e BC. O ponto em que estas retas se intersetam é o centro da circunferência que procuramos (neste caso é o circuncentro do triângulo ABC).*
- *Com centro neste ponto traçam-se duas circunferências. Uma que passa por A, B e C e outra que passa por D. O raio da circunferência que procuramos é a média aritmética entre os raios destas duas circunferências.*



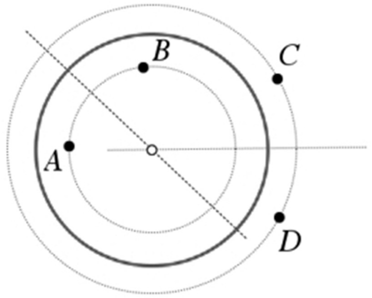
Hipótese 2 – Três casos:

AB-CD   AC-BD   AD-BC

Agora, os passos a seguir para, por exemplo, AB-CD são:

- *Traçam-se as mediatrizes dos segmentos AB e CD.*
- *O ponto em que estas retas se intersetam é o centro da circunferência que procuramos.*
- *Com centro neste ponto traçam-se duas circunferências. Uma que passa por A e B e outra que passa por C e D.*

– *O raio da circunferência que queremos achar é a média aritmética entre os raios destas duas circunferências.*



Conclusão, o número máximo de circunferências nas condições impostas é 7.

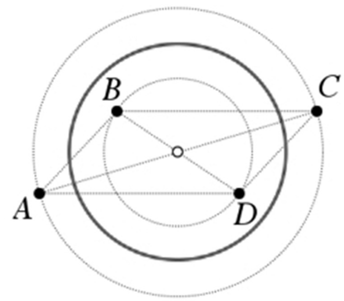
SEGUNDA QUESTÃO

Demos a palavra ao Mário:

– *Seguindo o método descrito, caso haja paralelismo entre lados, temos problemas! Para mais e para menos…*

– *Analisei situações em que duas das mediatrizes coincidem (quadrados, retângulos, trapézios isósceles) – aí temos infinitas soluções, mas estamos fora do contexto, uma vez que os quatro pontos pertencem a uma mesma circunferência.*

– *Analisei depois situações em que duas das mediatrizes ficam estritamente paralelas. Num paralelogramo sem lados perpendiculares penso ter encontrado a situação "mínima", onde além das quatro circunferências resultantes da hipótese 1, apenas encontrei mais uma da hipótese 2 - a que resulta de unir pares de vértices situados na mesma diagonal, e que tem centro… no centro do paralelogramo.*



Conclusão, o número mínimo de circunferências nas condições impostas é 5.

Nota final – Existe um evidente paralelismo entre este problema e o problema *"Pontos e planos, sempre no espaço"*, proposto no número 127 da *Educação e Matemática*: *Temos quatro pontos no espaço, não complanares. Quantos planos existem que sejam equidistantes dos quatro pontos?*