Desenvolver o pensamento relacional na aprendizagem dos números e das operações no ensino básico

Renata Carvalho
João Pedro da Ponte

As aprendizagens matemáticas dos alunos devem ser promovidas com base na compreensão e no raciocínio. Compreender e saber operar com números é essencial para o percurso escolar dos alunos e para a sua vida quotidiana. Neste artigo, argumentamos que esta compreensão não se adquire apenas através da manipulação simbólica e da memorização e aplicação de regras e procedimentos de cálculo, mas principalmente através de um ensino que contribua para o desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos.

O QUE É O PENSAMENTO RELACIONAL?

Usar o pensamento relacional é mobilizar as propriedades fundamentais das operações e da igualdade para analisar e resolver problemas tendo em conta o seu contexto (Empson, Levi & Carpenter, 2010).

Desde muito cedo, de forma intuitiva, os alunos desenvolvem e usam conexões aritméticas simples relacionadas com as propriedades das operações (Carpenter, Franke & Levi, 2003; Empson et al., 2010). Por exemplo, quando um aluno tem de adicionar 50 com 30 e diz que são 80 porque 5 mais 3 dá 8 e depois multiplica por 10, usa a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição $[50+30=(5+3)\times 10]$. Se, para dividir 63 por 7, responde que é 9 porque $7\times 9=63$, recorre à identidade fundamental da divisão. Ou ainda, se para calcular $8\times 3/8$, diz que se 8 grupos de $1/8$ é igual à unidade, então então $3/8$ serão três unidades, é porque recorre à decomposição de números, à propriedade comutativa e associativa e ao produto de um número pelo seu inverso $(8\times 3/8=8\times 3\times 1/8=8\times 1/8\times 3=1\times 3=3)$.

Se nos desafiarem a pensar sobre o número 48 ou sobre a fração $3/4$, muitas serão certamente as representações e operações que surgem na nossa mente (figura 1). Podemos recuperar imagens mentais de representações icónicas do número, como o modelo de área ou a reta numérica que nos remete para uma compreensão do número 48 como estando próximo de 50, ou então representações simbólicas de um conjunto de operações cujo resultado é 48, e que espelham composições e decomposições de números. Por exemplo, 4×12 relaciona-se diretamente com 2×24 se pensarmos em relações de dobro e metade.

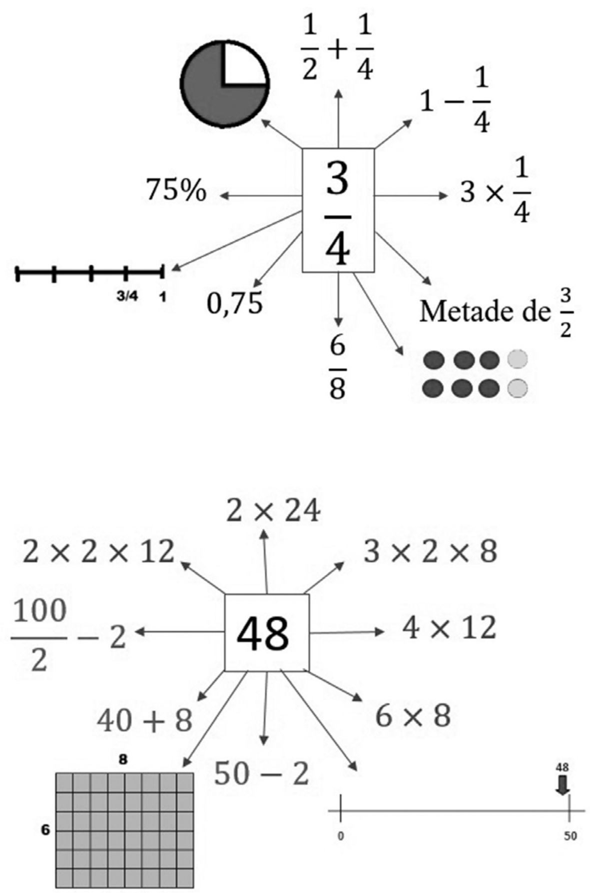


Figura 1. Representações e operações associadas a 48 e 3/4

No caso da fração 3/4, podem igualmente surgir representações icónicas que se associam aos diversos significados de número racional, como é o caso da relação parte-todo quer em unidades discretas quer em unidades contínuas ou à medida, como é o caso da reta numérica. As representações simbólicas podem surgir não só associadas a frações equivalentes como é o caso de 6/8, a representações equivalentes dos números racionais como é o caso de 75% ou 0,75, mas também a operações cujo resultado seja 3/4. É de notar que o entendimento dos números 48 e 3/4 não se esgota nas situações aqui apresentadas.

Embora as expressões indicadas na figura 2 envolvam os mesmos números, o modo como as podemos resolver é diferente pois o seu nível de exigência cognitiva não é o mesmo. Enquanto a resolução da expressão 12+4=☐ requer a compreensão do sinal de igual como indicativo de uma resposta, as expressões 12+☐=16 e 16=☐+12 envolvem uma compreensão relacional da igualdade. A forma redutora com que os alunos usualmente percecionam o significado do sinal de igual é um entrave ao desenvolvimento do pensamento relacional e, consequentemente, ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

$$12 + 4 = \square$$

$$12 + \square = 16$$

$$16 = \square + 12$$

Figura 2. Expressões com e sem valor em falta

O modo como cada um pensa sobre números espelha as aprendizagens, formais e não formais, que teve oportunidade de experimentar. De salientar a importância dos contextos na aprendizagem dos números com compreensão, onde os alunos dão exemplos do modo como pensam enquadrando os números em contextos previamente conhecidos. Por exemplo, quando no cálculo mental um aluno explica que, para calcular 3/4 – 1/2 "Imaginava uma piza na minha cabeça onde tivesse fora uma fatia, 1/4, e tirava 1/2. Ficava 1/4", está a relacionar a expressão numérica com um contexto conhecido em que 3/4 pode associar-se ao modelo circular apresentado na figura 1.

O pensamento relacional centra-se na compreensão e uso de um conjunto de relações (como as que apresentámos). O seu desenvolvimento apoia a compreensão dos números e das operações influenciando as estratégias de resolução de problemas dos alunos e levando-os a usar relações numéricas que lhes são familiares para estabelecer novas relações e efetuar o cálculo, ou mesmo a recorrer a contextos que possam apoiar os seus processos de raciocínio. Na perspetiva de Empson et al. (2010), se o desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos for apoiado, o conhecimento acerca da generalização das propriedades dos números e das operações torna-se mais explícito e pode ser a base para a aprendizagem da álgebra nos níveis de escolaridade seguintes, contribuindo para reduzir os erros e equívocos dos alunos. O trabalho em torno do desenvolvimento do pensamento relacional na sala de aula constitui uma mudança essencial na abordagem aos números e às operações, uma vez que, como dizem Jacobs, Franke, Carpenter, Levi e Battey (2007), o foco deixa de estar no cálculo de respostas (foco aritmético) para passar a estar na análise de relações (foco algébrico) importantes para a aprendizagem da álgebra.

Por vezes, o ensino dos números e das operações centra-se demasiado na manipulação simbólica e na realização de algoritmos, nos primeiros anos de escolaridade, sem que os alunos compreendam a grandeza e valor dos números e as relações entre números e operações. Alguns estudos nacionais resultantes de trabalhos de mestrado e doutoramento, que apresentamos de seguida, realçam a importância do desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos apresentando tarefas que podem ser realizadas com os alunos ao longo do ensino básico. Apesar de terem sido realizados num determinado ano de escolaridade, estas tarefas são transversais a todo o ensino básico quando sujeitas a alguns ajustamentos. Isto é, a resolução de igualdades e desigualdades não se resume a um trabalho no 1.º ciclo; não se incentiva o cálculo mental dos alunos apenas no 1.º e 2.º ciclo; nem se propõe a exploração de sequências apenas no 3.º ciclo.

PENSAMENTO RELACIONAL: ALGUNS EXEMPLOS

Raquel Cerca, em 2014, na sua dissertação de mestrado, apresenta tarefas no âmbito da igualdade (figura 3) e desigualdade (figura 4) no 3.º ano. A resolução indicada na figura 3 mostra que o aluno usou a "propriedade comutativa na subtração", quando esta não existe. Esta tendência de pensar em 6 – 12 como igual a 12 – 6 deverá fazer-nos questionar se não deveremos apresentar muito mais vezes aos alunos expressões do tipo "6=__ – 12" (em vez de apenas "__ – 12=6") de modo a ajudar os alunos a desenvolver a sua compreensão do significado do sinal de igual, bem como a não existência da propriedade comutativa na operação inversa da adição.

6 = <u>**6**</u> – 1 2 porque 6 + 6 é 12 e 12 – 6 dá 12

Figura 3. Relação de igualdade

Na figura 4, a questão A requer que os alunos compreendam o significado do símbolo ">" para que percebam que o valor em falta tem de ser inferior ao resultado da expressão apresentada.

A estratégia do aluno centra-se na resolução da expressão $10+1=11$ em que retira 1 a 11 para chegar a um valor menor. A par disto, o significado do sinal de igual parece não estar ainda devidamente compreendido, uma vez que o aluno, na expressão $10+1=11-1=10$ usa-o como um separador dos passos que realiza de forma sequencial e não como um sinal de equivalência. Este é um procedimento que surge com alguma frequência nas resoluções dos alunos e para o qual os professores devem estar atentos para assim poderem discutir e corrigir conceções incorretas. Na questão B, uma grande parte dos alunos realiza as operações para poder comparar as somas e assim decidir que sinal colocar entre elas, quando a análise de relações entre as parcelas é suficiente para resolver a tarefa. Contudo, existem alunos que estabelecem estas relações verificando que, se 39 e 42 têm mais uma unidade que 40 e 43, respetivamente, então a expressão da esquerda é menor que a da direita.

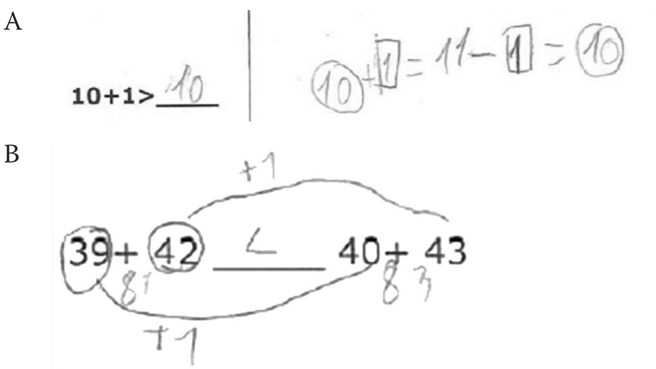
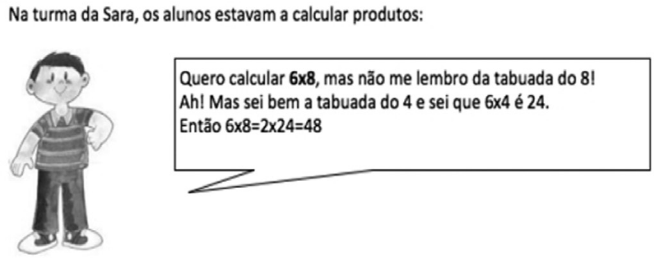


Figura 4. Relação de desigualdade

Célia Mestre em 2014, no seu trabalho de doutoramento, cujo objetivo era desenvolver o pensamento algébrico dos alunos no 4.º ano, apresenta diversas tarefas das quais destacamos duas, que apoiam a generalização de estratégias de cálculo e as relações de dobro e metade (figuras 5 e 6). A figura 5 apresenta parte de uma tarefa cujo objetivo era explorar estratégias de cálculo usando dobro e metade (o dobro dos valores da tabuada do quatro corresponde à tabuada do oito) e a generalização destas estratégias para além dos casos particulares. A estratégia A da figura 5 apresenta a explicitação da generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural e a estratégia B uma generalização em linguagem matemática. Durante a discussão coletiva os alunos são desafiados a substituir o "?" por diversos números em expressões semelhantes para que compreendam o símbolo como a representação de "um número qualquer".

A análise e discussão da estratégia B fez com que os alunos percebessem que esta não pode ser verdadeira porque a seguir ao último sinal de igual não pode estar "?", pois assim toda a expressão ficaria igual ao valor atribuído a "?". É durante a discussão da validade desta expressão que surge a representação correta em linguagem matemática – "$?\times 8=2\times(?\times 4)$".

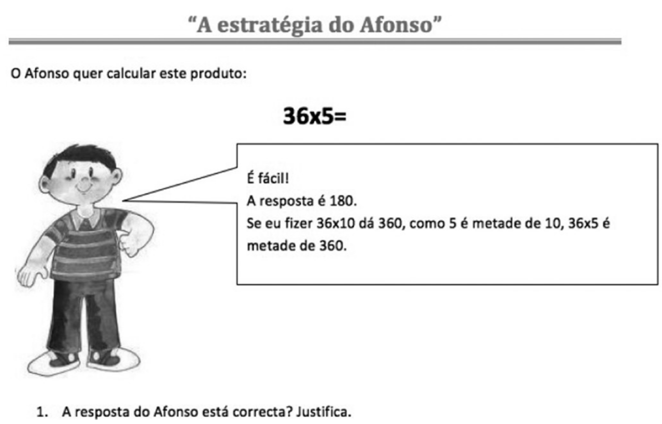
"Calcular usando o dobro"



A	Para descobrirmos a tabuada do 8 fazemos o dobro (x2) da tabuada do 4.
B	$? \times 8 = 2 \times (? \times 4) = ?$ $? = 6$ $6 \times 8 = 2 \times (6 \times 4) = 6$

Figura 5. Tarefa "calcular usando o dobro" e exemplos da generalização de estratégias dos alunos, correta (A) e incorreta (B)

Na figura 6, apresentamos uma tarefa onde os alunos são desafiados a pensar sobre "A estratégia do Afonso". Esta tarefa tem objetivos semelhantes à anterior, mas pretende especificamente explorar a relação inversa da tarefa anterior (multiplicar por 5 é equivalente a calcular metade da multiplicação por 10).



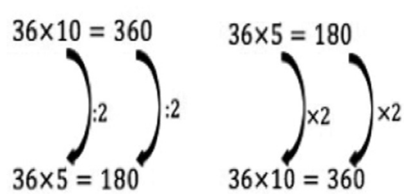


Figura 6. Tarefa "A estratégia do Afonso" e exemplo da relação aritmética entre dobro e metade

A análise da estratégia apresentada na figura 6 permitiu explorar o entendimento dos alunos face à multiplicação por 10 e evidenciar a relação inversa entre as operações multiplicação e divisão. A análise e discussão desta estratégia de resolução, permitiu que os alunos chegassem a uma generalização em linguagem natural – "Para descobrirmos a tabuada do cinco, fazemos metade da tabuada do dez".

Em 2016, Renata Carvalho apresenta propostas centradas no desenvolvimento do cálculo mental com números racionais dos alunos de 6.º ano, onde privilegia diversas relações numéricas, entre elas a relação entre representações dos números racionais (figura 7) e relações de dobro (figura 8).

Qual o valor exato de…

$\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$

Gonçalo: Deu-me $\frac{1}{2}$. Eu fiz por porcentos . . . Vi $\frac{1}{4}$ é 25% e $\frac{1}{2}$ é 50. Então dividi . . . Eu fiz $\frac{1}{4}$ a dividir por $\frac{1}{2}$ que é $25 \div 50$.

Figura 7. Relação entre representações

Na figura 7, a estratégia de Gonçalo evidencia a mudança da representação fracionária para percentagem, onde este opera com percentagens como se fossem números naturais, recorrendo a uma propriedade da divisão (divisor = dividendo÷ quociente).

Qual o valor exato de…

$5\%\ de\ ? = 3$

Eva: Eu passei o 5% para 10% que era mais fácil. Mas tive de multiplicar por 2 e então tínhamos de multiplicar o resultado por 2 também, 6. . . Depois multipliquei 10 por 6 que dá 60.

Figura 8. Relação parte-parte e de dobro

Na figura 8, a estratégia de Eva realça a importância do trabalho em torno de números de referência, neste caso 10% e da relação parte-parte (5% e 3).

As relações de dobro que apresentámos nas figuras 5 e 6, a propósito do trabalho de Mestre (2014), surgem aqui como ferramenta essencial ao estabelecimento de relações com compreensão num conjunto numérico mais complexo, o dos números racionais. Isto reforça a nossa convicção de que o desenvolvimento do pensamento relacional deve ser transversal a toda a aprendizagem de modo a fornecer aos alunos ferramentas para poderem pensar sobre números e operações, em qualquer nível de ensino.

Joana Mata-Pereira, em 2015, no trabalho de doutoramento em desenvolvimento, propõe a exploração de justificações dos alunos. Na figura 9, apresentamos parte de uma tarefa de sequências que tem como objetivo a produção de justificações e generalizações pelos alunos.

---

1. Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

1.3. Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta.

Figura 9. Tarefa usada por Mata-Pereira (2015) para explorar justificações dos alunos

Os diálogos seguintes mostram o modo como a professora, no momento de discussão coletiva, gere as respostas dos alunos no sentido de apoiar a formulação de justificações:

Duarte: Foi. *86 menos 1 a dividir por 4*.

Professora: Assim Duarte [referindo-se a $\frac{86-1}{4}$]? Está bom para ti? Não sei se é isto, estou a perguntar, é isto? É isto ou é isto [escreve $\frac{86}{4}-1$]?

Duarte: Primeira.

(…)

Professora: Quem pensou de outra forma? . . .

António: À medida que pensámos, mais quatro, os números *iam ser sempre ímpares*. Então, o número ia ter sempre mais quatro unidades.

(…)

Professora: OK. Eles foram somando. A sequência é uma sequência de números ímpares . . . Na sequência não aparecem [números pares]. Justifiquem, acrescentem esta justificação, OK? Que era outra forma de justificar. Não aparecem números pares.

(…)

Joaquim: Nós fizemos… *Nós justificámos que não era múltiplo de 4*.

Professora: (…) *este argumento serve ou não para justificar*. Uma de vocês que me explique, ou então as duas em coro.

Bianca: Se eles dissessem que 85 não era múltiplo de 4 podiam fazer isso, mas… Porque, então, tem de ser, *para ser múltiplo de 4 nós tiramos um, que é o ponto central… O número de pontos é 86, só que nós queremos tirar primeiro o ponto central, só depois é que podemos dividir por 4*.

Estes diálogos mostram o modo como a professora transforma em linguagem matemática a linguagem natural usada por Duarte escrevendo duas expressões no quadro ($\frac{86-1}{4}$ e $\frac{86}{4}-1$), para que este possa dar uma resposta com base na interpretação que faz destas expressões e desafia os alunos a apresentarem outras estratégias. Partindo da estratégia de António e da afirmação de Joaquim, a professora incentiva Bianca a apresentar uma justificação devidamente clara e fundamentada. O objetivo desta tarefa, embora não esteja explícito nos diálogos que aqui apresentamos é que os alunos cheguem ao termo geral – a generalização.

CONCLUSÃO

Os exemplos apresentados ilustram o que consideramos essencial na aprendizagem dos números e das operações no ensino básico, nomeadamente, a importância do desenvolvimento do pensamento relacional. Este deve iniciar-se logo nos primeiros anos para que ao longo da escolaridade os alunos se possam ir munindo de ferramentas que os ajudem a compreender e a pensar sobre números e operações de forma relacional. Existem conceitos básicos essenciais no processo de desenvolvimento do pensamento relacional que, de forma progressiva, permitem uma aprendizagem facilitadora da transição da aritmética para a álgebra. Na perspetiva de diversos autores como Carpenter et al. (2003), Kieran (2004), Ponte, Branco e Matos (2009) e Carvalho (2016), esta aprendizagem, deve focar-se:

- em relações e não apenas no cálculo e na resposta numérica;
- nas operações e suas inversas, e na ideia relacionada de operar/não operar;
- na valorização das representações e nas resoluções, e não apenas nas resoluções;
- em números e letras, e não apenas nos números;
- na compreensão do sinal de igual enquanto relação de equivalência;
- na diversidade de contextos de aprendizagem;
- na valorização do uso de expressões de valor em falta;
- na promoção de discussões matemáticas na sala de aula.

Desenvolver o pensamento relacional dos alunos implica ter uma perspetiva da aprendizagem dos números e das operações mais relacional e não tão mecanicista. A capacidade de mecanizar e aplicar bloqueia perante pequenas mudanças nas situações e rapidamente se esquece, enquanto a capacidade de relacionar assente em referências e aprendizagens significativas é muito mais duradoira e mobilizável para novas situações.

Referências

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi. L. (2003). *Think Mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carvalho, R. (2016). *Cálculo mental com números racionais: Um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal. (disponível em http://hdl.handle.net/10451/23646).

Cerca, M. R. (2014). *O desenvolvimento do raciocínio relacional através das relações de igualdade e desigualdade : uma experiência de ensino no 3º ano.* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal. (disponível em http://hdl.handle.net/10451/17686)

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer.

Jacobs, V., Franke, M., Carpenter, T., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2015). Ações do professor na condução de uma discussão matemática sobre sequências. *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação matemática* (pp. 107-121). Lisboa: APM.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal. (disponível em http://hdl.handle.net/10451/15481).

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: DGIDC.

Renata Carvalho

UIDEF - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa