O modelo retangular na compreensão de algoritmos operatórios com números racionais representados em fração

Graciosa Veloso

Este artigo surge na sequência de outros que escrevi e que foram publicados nesta revista, focados no desenvolvimento do conhecimento matemático necessário a um ensino que valoriza a atividade e a compreensão matemáticas nos processos de aprendizagem dos números racionais[1]. Neste tema programático, a herança de um ensino centrado quase exclusivamente no treino de procedimentos de cálculo, conduz frequentemente ao equívoco de que quem domina técnicas de cálculo evidencia conhecimento e compreensão. Na minha experiência de docência em formação inicial de professores tenho constatado que a generalidade dos estudantes, com especial destaque para aqueles que dominam os procedimentos de cálculo algorítmico com números racionais representados na forma de fração, manifestam significativas dificuldades nas representações visuais correspondentes, evidenciando assim significativas lacunas do ponto de vista da compreensão. Trabalham mecanicamente com os números, confirmando que, tal como Kieren (1976) argumenta, tratam os números racionais como meros objetos de cálculo, não evidenciando compreensão de ideias que sustentam os procedimentos algorítmicos utilizados.

O objetivo principal deste documento é o de valorizar as representações em modelo retangular na compreensão dos algoritmos da adição/subtração e da multiplicação que envolvem números racionais representados na forma de fração. Este objetivo relaciona-se diretamente com uma das oito Práticas do Ensino da Matemática

> Chegar à fluência procedimental a partir da compreensão conceptual. Um ensino eficaz da matemática permite chegar à fluência na realização de procedimentos a partir de uma base de compreensão conceptual, de modo que os alunos, ao longo do tempo, se tornem competentes no uso de procedimentos de modo flexível aquando da resolução de problemas contextualizados e matemáticos (NCTM, 2014, p. 10).

Como mostrarei a seguir, os algoritmos da adição/subtração e da multiplicação aplicados aos números racionais são matematicamente justificados pelos conceitos de unidade de referência e de equivalência de frações. As representações em modelos de área, retangular e circular, são ferramentas a usar com o intuito de que esses conceitos sejam cabalmente compreendidos.

O domínio compreensivo de algoritmos constitui uma das componentes do desenvolvimento do sentido de qualquer operação aritmética. Contudo, este sentido carece da exploração de outras componentes cuja análise e discussão não estão contempladas neste artigo. Refiro-me à modelação de situações, quer realistas, quer puramente matemáticas, bem como a outros tipos de cálculo, especificamente o cálculo mental. De imediato e para enquadrar a discussão que me proponho fazer relativamente ao papel do modelo retangular no cálculo algorítmico, apresento uma das possíveis representações formais de número racional, a fração.

A FRAÇÃO COMO UMA DAS REPRESENTAÇÕES DE NÚMERO RACIONAL USADA EM CÁLCULO ALGORÍTMICO

As representações formais de número racional mais utilizadas em cálculo algorítmico são: fração, numeral misto e numeral decimal. Neste artigo vou referir-me, apenas, à primeira.

Qualquer número racional[2], inteiro[3] ou não inteiro, é representável por uma fração em que o numerador D representa um número inteiro e o denominador d representa um número natural (inteiro não nulo, $d \neq 0$). Estes termos, denominador e numerador, significam respetivamente: o número de partes equivalentes em que a unidade está decomposta; o número de partes equivalentes à parte unitária do denominador que estão a ser consideradas.

Há números racionais que podem ser representados por uma fração cujo denominador é uma potência de base 10 e

1 A palavra racionais é usada neste artigo para designar os números racionais não negativos.

2 Em Veloso G. (2015) é caracterizado número racional como quociente de dois inteiros.

3 A palavra inteiro é usada neste artigo, para representar qualquer número inteiro não negativo

expoente natural. A esta fração dá-se o nome de fração decimal. Note-se, porém, que a fração ½ não é decimal e é equivalente a uma infinidade de frações decimais, por exemplo 5/10, 50/100, 500/1000, etc. Há números racionais que não são exprimíveis por frações decimais, por exemplo 1/3, 1/6, etc. Generalizando, pode afirmar-se que, numa fração que admita uma fração decimal como equivalente, o denominador apresenta uma potência de base 2 com expoente natural ou uma potência de base 5 com expoente natural, ou o produto de potência natural de base 2 por potência natural de base 5.

O MODELO RETANGULAR NA COMPREENSÃO DO ALGORITMO DA ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO

As representações visuais mais frequentemente utilizadas para número racional, expresso por fração irredutível, são a retangular, a circular e em reta orientada. A representação retangular tem como suporte um retângulo cujas dimensões lineares são números inteiros, a circular é feita em círculo e a reta orientada associa-se a uma reta na qual está identificada a origem e um sentido. Considera-se como unidade de referência, a área em cada uma das duas primeiras representações e a distância da origem ao ponto correspondente a 1 na reta orientada.

Qualquer representação visual que envolva números racionais na forma de fração deve dar a entender a equivalência entre todas as partes em que a unidade é decomposta. Veem-se, frequentemente, representações circulares que envolvem denominadores 3, 5, 6, etc., em que é notória a não equivalência entre partes da decomposição da unidade. É de atender a que, com estes denominadores, é preferível utilizar modelos retangulares em papel quadriculado, por exemplo. As representações circulares podem, contudo, ser utilizadas para casos com denominadores 2, 4, 8, etc., ou, generalizando, que apresentem uma potência de base 2 e expoente natural. A representação em reta orientada, se bem que formalmente necessária, requer o domínio compreensivo de mais elementos do que o requerido aquando da representação de números inteiros. Além disto, quando utilizada para a adição/subtração não dá visibilidade direta aos diferentes denominadores dos termos envolvidos. Abreviadamente arrisco-me a afirmar que, enquanto representação, pouco ou nada ajuda na compreensão dos algoritmos que requerem denominadores iguais.

A iniciação aos números racionais é feita tradicionalmente através de modelos retangular e circular representando frações na forma irredutível e com o significado de relação parte/todo. Estes modelos são apressadamente abandonados, passando-se demasiado rapidamente para a representação em reta orientada e para o cálculo algorítmico, não sendo trabalhados com suporte visual os conceitos fundamentais de unidade de referência e de equivalência entre frações.

ALGORITMO DA ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO

O lugar do cálculo algorítmico no programa de matemática do Ensino Básico deve ser discutido à luz do desenvolvimento de competências como é proposto no Currículo Nacional do Ensino Básico: A aptidão para efetuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação (Ministério da Educação, DEB, 2001, p. 60).

Há a considerar ainda que o desenvolvimento tecnológico influenciou grandemente as atividades de natureza científica, tecnológica, social e o quotidiano, a tal ponto que atualmente a esmagadora maioria dos cálculos básicos são realizados em telemóvel. Consequentemente, a importância dos algoritmos de cálculo na matemática do ensino básico tem hoje uma relevância muito diferente da que tinha aquando da Revolução Industrial. Contudo, em termos mundiais, os programas de matemática contemplam algoritmos de cálculo. Como justificar então esta inclusão? Na comunidade educativa há concordância relativamente a que é a compreensão dos conceitos que estão na base dos procedimentos algorítmicos, e não a execução manual mecânica destes, que contribui para o desenvolvimento de competências e de conhecimentos necessários a uma intervenção crítica. O cálculo algorítmico com compreensão é uma das componentes do processo de ensino aprendizagem das operações aritméticas; para além dele há que cuidar do desenvolvimento do sentido de cada operação, valorizando-a como modelo matemático de situações problemáticas com significado.

A adição e a subtração requerem que todos os termos nelas envolvidos se refiram à mesma característica quantitativa. Quando estas operações envolvem números racionais assume particular importância reconhecer que esta exigência se traduz na igualdade dos denominadores de todos os termos. A compreensão destes dois requisitos corresponde à verificação, em simultâneo, da mesma unidade e à igualdade do número de partes em que esta está decomposta. Estas condições podem ser explicitadas recorrendo às representações em modelo retangular. Com as situações que seguidamente apresento e discuto pretendo salientar: (i) o papel estruturante que assumem a unidade de referência e a equivalência de frações no contexto do algoritmo da adição e da subtração; (ii) as vantagens das representações em modelos de área na compreensão destes conceitos.

Considere-se a tarefa (figura 1) que foi proposta numa turma de 3.º ano de escolaridade com o objetivo de desenvolver a compreensão do conceito de unidade de referência, articulando-a com a contagem de inteiros.

O José cozinhou três crepes para a sobremesa do almoço dele e dos dois filhos Ana e João. Comeram os três crepes. A Ana comeu a parte sombreada do crepe que está representado na figura A; o João, sem se saber muito bem porquê, comeu de dois crepes, a parte sombreada como mostra a figura B.

Qual dos dois irmãos comeu maior quantidade? Que quantidade comeu cada um?

Que quantidade comeram, no total, os dois irmãos?

Figura A

Figura B

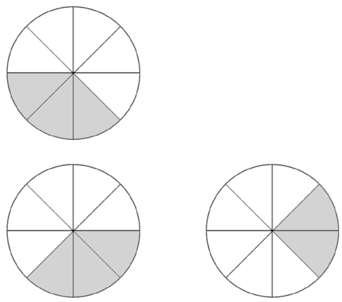

Figura 1. Tarefa para desenvolver a compreensão do conceito de unidade de referência

Relativamente à quantidade comida pela Ana, a resposta 3/8 foi unânime entre as crianças. Quanto à quantidade referente ao que o João comeu, a maioria das crianças considerou que a resposta adequada era 5/16 e a justificação dada por várias foi que "o João comeu 5 de 16". Esta resposta levou à discussão sobre a identificação da unidade de referência, questão fundamental na aprendizagem com compreensão do conceito de número racional.

Nesta tarefa merecem destaque os seguintes aspetos de natureza didática e formativa:

- é possível responder às 3 questões formuladas sem utilizar frações. São aceitáveis as seguintes respostas: O João comeu mais do que a Ana, esta comeu 3 fatias e ele comeu 5 e em conjunto 1 crepe; esta contagem pode ajudar na discussão sobre a necessidade de a unidade de referência ser comum às duas figuras.
- a adequação da representação em modelo circular de relações parte/todo, dado que existe um número de partes que é potência de 2.
- a importância da unidade de referência de qualquer fração e da sua consideração explícita nas respostas às questões formuladas na tarefa. É natural na situação apresentada considerar como unidade um crepe; foi esta a unidade considerada na resposta dada pelas crianças à quantidade que a Ana comeu; contudo, considerar 5/16 como representando a parte sombreada da figura B, corresponde a ter mudado de unidade, considerando como todo 2 crepes e não 1. Não é correto afirmar, por exemplo, que no total ambas comeram 3/8 mais 5/16.
- discutir no âmbito da formação os dois cenários, de acordo com as duas diferentes unidades de referência e verificar as respetivas diferenças e consistência concetual. Considerar como unidade um crepe sustenta que a Ana comeu 3/8, o João 5/8 e juntos totalizaram 3/8 + 5/8, ou seja, um crepe inteiro. Se a unidade for constituída por 2 crepes, a Ana comeu 3/16, o João comeu 5/16 e no total ambos comeram 8/16 que corresponde a um crepe.

De seguida apresento uma tarefa (figura 2) que pode ser adaptada à abordagem introdutória do algoritmo da adição/subtração. A tarefa tem por objetivo promover a compreensão do algoritmo da adição/subtração tirando partido da representação em modelo retangular.

Numa turma de 5.º ano de escolaridade existe a rotina Número do dia e num dia 20 a professora Célia sugeriu aos alunos que:

–mostrassem qual das frações 1/5 e 1/4 representava o maior número;

–representassem em fração a diferença entre o maior e o menor destes dois números.

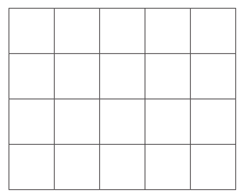

Figura 2. Tarefa para introdução do algoritmo de adição/subtração

Nesta tarefa merecem destaque os seguintes aspetos de natureza didática:

- a unidade de referência é a área do retângulo assumindo como unidade de área a quadrícula;
- a fração 1/5 tem expressão visual imediata numa coluna e a fração 1/4 numa linha;
- o modelo retangular em malha quadriculada permite apoiar a compreensão do algoritmo porque possibilita que a atribuição a cada dimensão linear do retângulo de cada um dos dois denominadores dos termos envolvidos torne visível a equivalência entre as duas frações de cada par: 1/4 e 5/20; 1/5 e 4/20.
- qualquer outro retângulo de dimensões lineares múltiplas de 4 e de 5, pelo mesmo fator, é uma representação a poder ser considerada nesta tarefa.

Para estas operações é possível e desejável em fase posterior proceder à utilização da reta orientada. Contudo, há que evidenciar que este modelo é significativamente mais formal do que os modelos de área considerados neste artigo e que requer, consequentemente, cuidados acrescidos.

O MODELO RETANGULAR E A COMPREENSÃO DO ALGORITMO DA MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação de números racionais envolve a compreensão do sentido aditivo desta operação com números inteiros; requer, também, a aplicação de um dos significados de fração, concretamente, de operador partitivo multiplicativo.

A utilização do modelo retangular para representar esta operação revela-se um auxiliar significativo porque dá visibilidade a dois dos aspetos envolvidos na complexidade deste conceito operatório, a saber, o da consideração de duas[4] unidades de referência diferentes e o do efeito operatório traduzido pela expressão *a multiplicação nem sempre aumenta.*

Considere-se a seguinte situação:

Quando numa sala de aula de 1.º ciclo, com 25 crianças, se procede ao apuramento da quantidade de leite envolvida na distribuição de um pacote de 200 ml a cada uma e se escreve 25 x 1/5 l = 5 l, esta expressão representa a soma de 25 parcelas, sendo 1/5 o valor de cada uma. A multiplicação apresenta-se nesta situação com um dos seus sentidos – o sentido aditivo – e de modo absolutamente idêntico ao que se passa quando os fatores envolvidos são números inteiros. Contudo, para esta mesma operação existem ainda situações em que o sentido aditivo da multiplicação não se ajusta, apesar de também estarem envolvidos um número racional não inteiro e um número inteiro, como acontece na próxima situação:

> *Quatro quintos dos trinta alunos da turma T almoçam diariamente na cantina da escola. Quantos alunos almoçam por dia nesta cantina?*

A expressão 4/5 x 30 representa o número de alunos que almoçam na cantina. A solução pode obter-se começando por determinar a quinta parte de 30 e de seguida multiplicar o resultado obtido por 4 escrevendo:

1/5 x 30 = 6

4 x 6= 24

e concluindo que 4/5 x 30 = 24

O sentido aditivo da multiplicação não é aqui adequado, uma vez que não tem significado a soma de trinta parcelas iguais a 4/5. É necessário recorrer ao significado de número racional como operador partitivo multiplicativo, como passo a exemplificar:

> *A quarta parte dos alunos desta turma T que almoçam na escola tem apoio da ação social escolar. Quantos alunos da turma são abrangidos por este apoio?*

4 Refiro-me aos casos em que, pelo menos um dos fatores é um número racional não inteiro.

A expressão 1/4 x 4/5 x 30 modela esta situação. À semelhança do que já aconteceu para a adição/subtração, o modelo retangular vai ser também aqui usado para representar a expressão inicial 4/5 x 30. A unidade é composta por 30 alunos que vão ser organizados num retângulo com 5 colunas e 6 linhas, como se vê na figura 3.

Figura 3. 30 crianças dispostas em retângulo de 6 × 5

Cada coluna representa a quinta parte dos trinta alunos da turma e portanto, quatro colunas mostram os 4/5 x 30, como mostra a figura 4.

Figura 4. As colunas sombreadas representam 4/5 × 30

A expressão 1/4 x 4/5 x 30 é representada na figura 5 por uma das 4 colunas sombreadas na figura 4.

Figura 5. A coluna sombreada representa 1/4 × 4/5 × 30

Conclui-se que: há 6 alunos abrangidos pelo apoio;

são equivalentes as expressões

1/4 x 4/5 x 30 e 1/5 x 30

ou seja, são verdadeiras as igualdades

1/4 x 4/5 x 30 = 1/5 x 30 = 6

e depreende-se que

1/4 x 4/5 = 1/5

Dando sentido à igualdade 1/4 x 4/5 = 1/5, mas desligando do contexto.

A expressão pode ser interpretada como a quarta parte de quatro coisas, em que estas coisas são quintos. E como a quarta parte de quatro coisas é uma dessas coisas, compreende-se que a quarta parte (1/4) de quatro quintos (4/5) seja um quinto (1/5). Recorrendo novamente ao modelo retangular é possível atribuir significado à igualdade 1/4 x 4/5 = 1/5, como se exemplifica de seguida (figuras 6 e 7). A unidade será a área de um retângulo de 4x5, com 4 linhas e 5 colunas, de tal modo que, quer 1/5, quer 1/4 sejam imediatamente visíveis.

A região sombreada no retângulo apresentado na figura 6 representa 4/5.

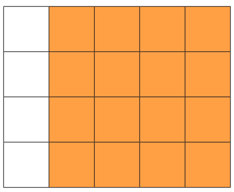

Figura 6. A região sombreada representa 4/5

De seguida há que sombrear a quarta parte da região já sombreada como se apresenta na figura 7.

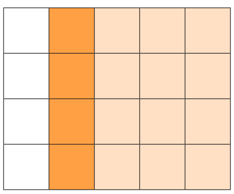

Figura 7. A coluna com o sombreado mais escuro representa 1/4 de 4/5

Finalmente, é necessário exprimir esta região (sombreada mais escura) assumindo a unidade inicial apresentada o que pode ser representado pela fração 1/5. Destaco que foram mobilizadas duas unidades de referência: (i) a área do retângulo de 4*5 foi necessária para representar 4/5; (ii) este valor – 4/5 – serviu como unidade para isolar a (sua) quarta parte; (iii) finalmente foi necessário exprimir este último valor assumindo a unidade inicial.

Generalizando, no produto p, de dois números racionais não inteiros, f e g, p = f x g, estão envolvidas duas unidades:

– a unidade inicial é referência para o que se considerar como primeiro fator, g, e para o produto p; g é a unidade de referencia para f.

Saliente-se ainda um aspeto da multiplicação de números racionais visível na figura 7: o produto de 1/4 por 4/5 é menor do que 4/5, relação não existente quando o universo de trabalho é o conjunto dos números naturais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aprendizagem compreensiva dos algoritmos de cálculo requer a exploração dos conceitos que os fundamentam e consequentemente é ilusório pensar que ela se processa com o treino algorítmico. É assim fundamental organizar, implementar e avaliar o trabalho em torno do desenvolvimento da compreensão dos conceitos de unidade de referência e de equivalência de frações explorando tarefas diversificadas com o apoio de recursos adequados, entre os quais se destacam os modelos de área.

Quando se utilizam modelos retangulares (de dimensões lineares inteiras) é importante a exploração que permite associar cada linha, cada coluna e cada célula (corresponde ao cruzamento de linha com coluna) a frações unitárias. Fica também a sugestão de substituir a expressão *redução ao mesmo denominador* por *considerar a mesma unidade dividida em igual número de partes* para os termos da adição/subtração.

A formação de professores enfrenta vários desafios, entre os quais se destaca o aprofundamento matemático dos conceitos e das relações em articulação estreita com o conhecimento didático requeridos para um ensino que oriente e apoie aprendizagens duradouras e significativas. Se este artigo puder contribuir para a formação cumpriu a finalidade que me propus.

Referências

Battista, M. T., (2012). Cognition-based assessment & teaching of fractions. Building on Student's Reasoning. Portsmouth: Heinemann.

Kieren, T. E. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. A. Lesh (ed.), *Number and Measurement* (pp. 101-144). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education

National Council of Teachers of Mathematics (2017). Princípios para a Ação – Assegurar a todos o sucesso em Matemática (F. Nunes, Trad.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Veloso, G. (2014). Número Racional como quociente de inteiros. Educação e Matemática, 128, 8-12.

Graciosa Veloso

Escola Superior de Educação de Lisboa