Funções periódicas na Folha de Cálculo

Susana Carreira

São inúmeros os exemplos de fenómenos periódicos que, por todo o lado, se sucedem. Alguns serão mais interessantes do que outros, mas com situações bastante simples podem surgir pistas para o tratamento da noção matemática de função periódica. Essa é a proposta deste artigo, onde se procura também ilustrar a possibilidade de utilizar a Folha de Cálculo na exploração deste tipo de funções.

Vivemos num mundo fértil em fenómenos periódicos ou, pelo menos, aproximadamente periódicos. O planeta em que habitamos efectua movimentos periódicos, quer rodando em torno do seu eixo, quer ao descrever a sua órbita em volta do sol. Esperamos a luz do dia e o escurecer da noite com uma certa periodicidade, como esperamos também, periodicamente, o verão ou o inverno. No nosso quotidiano deparamos com diferentes periodicidades, como nos casos em que compramos o nosso jornal diário ou o semanário preferido. Se perdemos o autocarro ou o comboio, ficamos a aguardar o próximo, esperançosos de que a periodicidade da tabela dos horários se concretize. A própria fila que nos aguarda no transporte matinal e no regresso a casa tem o dom de nos causar acessos periódicos de impaciência.

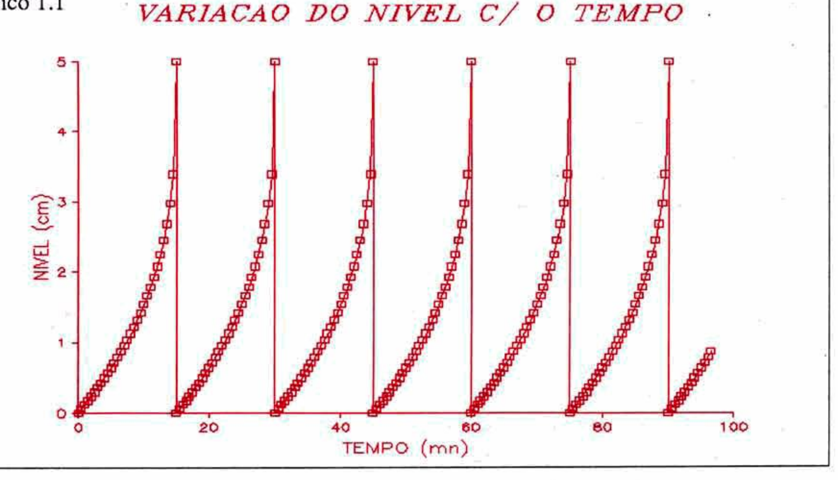
São inúmeros os exemplos de fenómenos periódicos que, por todo o lado, se sucedem. Uns serão mais interessantes do que outros, mas há situações relativamente simples que poderão fornecer pistas para o tratamento da noção matemática de função periódica.

Parar o tempo para medir o tempo

Muito antes de existirem autocarros, já se sentia a necessidade de medir o tempo. Um dos primeiros instrumentos criados pelo homem para prover a essa necessidade foi a ampulheta. O princípio de funcionamento é simples: dois recipientes de vidro, geralmente de forma cónica, unidos pelos vértices, por onde comunicam; um dos cones está cheio de areia ou de água, que vai escoando para o outro cone, pela a acção da gravidade, com um débito de escoamento constante. Desde que o conteúdo do vaso "superior" começa a escoar até que é totalmente recolhido no vaso "inferior", decorre um intervalo de tempo determinado. Se a ampulheta for, por exemplo, de 15 minutos, saberemos quando passou exactamente esse tempo. Podemos então virar a ampulheta, contar mais 15 minutos e repetir este processo sucessivamente.

Suponhamos agora que queremos medir intervalos de tempo menores com uma ampulheta de água de 15 minutos. Poderemos então tentar graduá-la para

Gráfico 1.1



intervalos de meio minuto, criando uma escala que nos permita ler o tempo a partir do nível de água no recipiente receptor. Estaremos assim, perante a possibilidade de trabalhar com uma função que relaciona o nível da água, N, no recipiente "inferior" com o tempo.

O gráfico **1.1** da página anterior pretende ilustrar de que forma o nível de líquido no cone "inferior" varia com o tempo, considerando que a ampulheta é sucessivamente virada de 15 em 15 minutos. Este gráfico foi obtido a partir de uma tabela de valores construida na Folha de Cálculo.

Antes, porém, de recorrer à Folha de Cálculo, há que estabelecer analiticamente uma expressão que permita calcular o nível do líquido a partir do tempo decorrido. Poderemos adoptar os seguintes valores como dados:

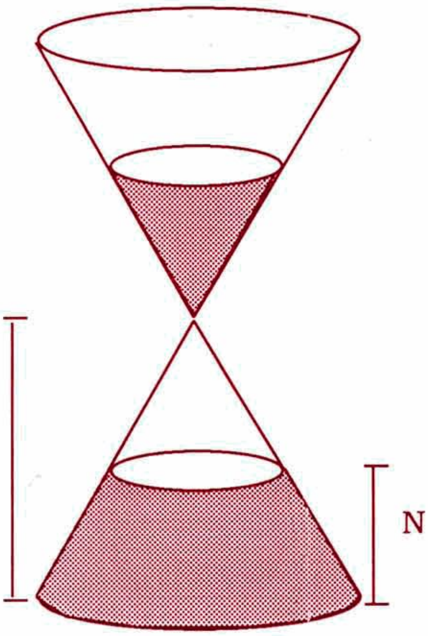


Figura 1

Volume de cada cone: 30 cm³
Altura de cada cone: 5 cm
Débito de escoamento da água: 2 cm³/mn
Tempo total da ampulheta: 15 mn.

Comecemos por definir a relação que se verifica entre o volume de líquido no cone "superior" e o tempo, à medida que o líquido se vai escoando. Facilmente se conclui que será:

$$(1) \quad V(t) = 30-2t \qquad (\text{cm cm}^3)$$

Em seguida, e com base no esquema da figura 1, somos levados a concluir que o nível da água, N, é dado pela diferença entre 5 e a altura do cone de água existente no recipiente "superior".

Fazendo intervir a fórmula do volume de um cone, conhecidos o raio da base e a altura, e algumas noções de trigonometria, podemos então deduzir a expressão:

$$(2) \quad N(t) = 5 - \sqrt[3]{\frac{3(30-2t)5^2}{18}}$$

Uma vez deduzida a expressão de N(t), o problema que se coloca é o de encontrar um processo para construir na Folha de Cálculo as seguintes funções:

$V: [0, +oo[\longrightarrow IR$

$$\begin{array}{ll} V(t) = 30-2t & \text{se } 0 \le t < 15 \\ V(t) = 30 & \text{se } t = 15 \\ V(t) = V(t-15) & \text{se } t > 15 \end{array}$$

$N: [0, +oo[\longrightarrow IR$

$$N(t) = 5 - \sqrt[3]{\frac{3(30-2t)5^2}{18}} \qquad \text{se } 0 \le t < 15$$

$$\begin{array}{ll} N(t) = 0 & \text{se } t = 15 \\ N(t) = N(t-15) & \text{se } t > 15 \end{array}$$

Nota:
V(t) traduz a variação de volume de água no recipiente "superior".
N(t) traduz a variação de nível de água no recipiente "inferior".

Ambas as funções são periódicas de período P=15, facto que corresponde a virar a ampulheta (instantaneamente!) de 15 em 15 minutos.

A grande questão a resolver é, no fundo, a de conseguir um processo de formalizar na Folha de Cálculo as descontinuidades de cada uma das funções nos pontos da forma t=15n, com $n \in IN$.Uma das formas possíveis de se exprimir, através da Folha de Cálculo, aquilo que se verifica, para cada $n \in IN$:

$$\lim_{t \to 15n^+} V(t) = 30 \qquad \lim_{t \to 15n^+} N(t) = 0$$

$$\lim_{t \to 15n^-} V(t) = 0 \qquad \lim_{t \to 15n^-} N(t) = 5$$

será "autorizar" que a cada valor da forma t=15n, com $n \in IN$, correspondam duas imagens diferentes.

Vejamos, então, um procedimento que satisfaz este requisito, para a construção da tabela de valores na Folha de Cálculo.

1º passo: Construção de uma coluna auxiliar, onde serão gerados os primeiros termos da sucessão dos elementos de INo.

COLUNA A:
A1: 0
A2: A1+1
copy

2º passo: Construção de uma coluna de valores que traduzirão um tempo "virtual", que também se poderá designar como o "tempo da ampulheta".

Nesta coluna pretendemos simular a ideia de que ao fim de 15 minutos, o tempo recomeça a partir do zero; queremos ainda que o incremento seja de 0,5 (meio minuto). Podemos aqui, lançar mão da existência da função MOD na Folha de Cálculo, função essa, que permite calcular o resto da divisão inteira de um número por outro. Aproveitando assim, as classes de resto da divisão por 31, construimos a coluna B.

COLUNA B:
B1: 0
B2: MOD (A2,31)*0.5
copy

3º passo: Construção de uma coluna de valores que irão corresponder a um tempo "real".

Nesta coluna queremos que o tempo sofra uma espécie de paragem para cada valor $t=15n, n \in \mathbb{N}$, mas que em seguida continue a aumentar. Faremos então:

COLUNA C:
C1: 0
C2: IF(B2=0, C1, C1+0.5)
copy

4º passo: Construção das imagens das funções N e V, utilizando como objectos, ou seja, para valores de t, o conteúdo da coluna do tempo "virtual", de forma a conseguir traduzir a natureza periódica das mesmas. Basta-nos aqui introduzir as fórmulas já deduzidas para exprimir o volume e o nível, (1) e (2).

Podemos agora, em presença da tabela de valores obtidos (tabela **1.1**), analisar pacificamente quais os que constituem imagens das respectivas funções e quais os que representam "falsas imagens".

Tendo esta ideia bem presente, será porventura interessante interpretar alguns dos gráficos que podem ser construidos (gráficos **1.1, 1.2, 1.3**).

Tabela 1.1

COL.AUX.	TEMP.VIR.	TEMP.REAL	VOLUME	NIVEL (cm)
0	0	0	30	.000
1	.5	.5	29	.056
2	1	1	28	.114
3	1.5	1.5	27	.173
4	2	2	26	.233
5	2.5	2.5	25	.295
6	3	3	24	.358
7	3.5	3.5	23	.424
8	4	4	22	.491
9	4.5	4.5	21	.560
10	5	5	20	.632
11	5.5	5.5	19	.706
12	6	6	18	.783
13	6.5	6.5	17	.862
14	7	7	16	.945
15	7.5	7.5	15	1.031
16	8	8	14	1.122
17	8.5	8.5	13	1.216
18	9	9	12	1.316
19	9.5	9.5	11	1.421
20	10	10	10	1.533
21	10.5	10.5	9	1.653
22	11	11	8	1.782
23	11.5	11.5	7	1.922
24	12	12	6	2.076
25	12.5	12.5	5	2.248
26	13	13	4	2.446
27	13.5	13.5	3	2.679
28	14	14	2	2.973
29	14.5	14.5	1	3.391
30	15	15	0	5.000
31	0	15	30	.000
32	.5	15.5	29	.056
33	1	16	28	.114
34	1.5	16.5	27	.173
35	2	17	26	.233
36	2.5	17.5	25	.295
37	3	18	24	.358
38	3.5	18.5	23	.424

Gráfico 1.2

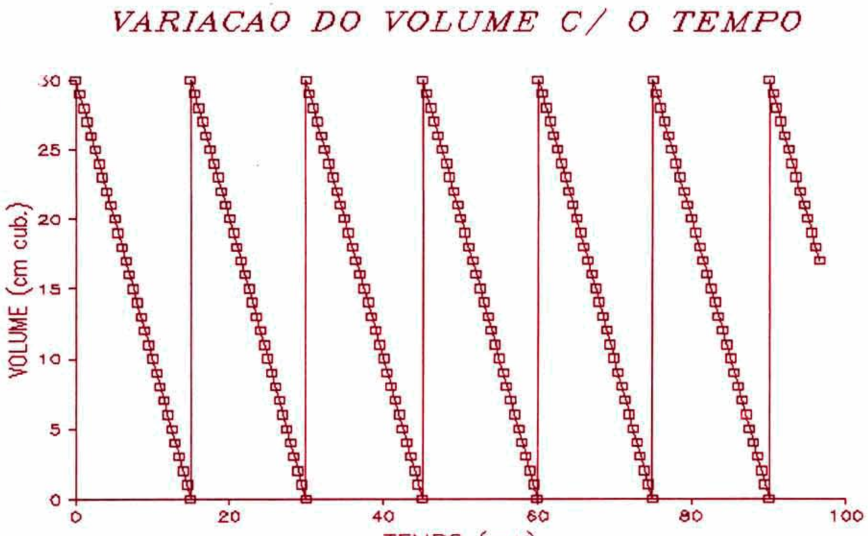
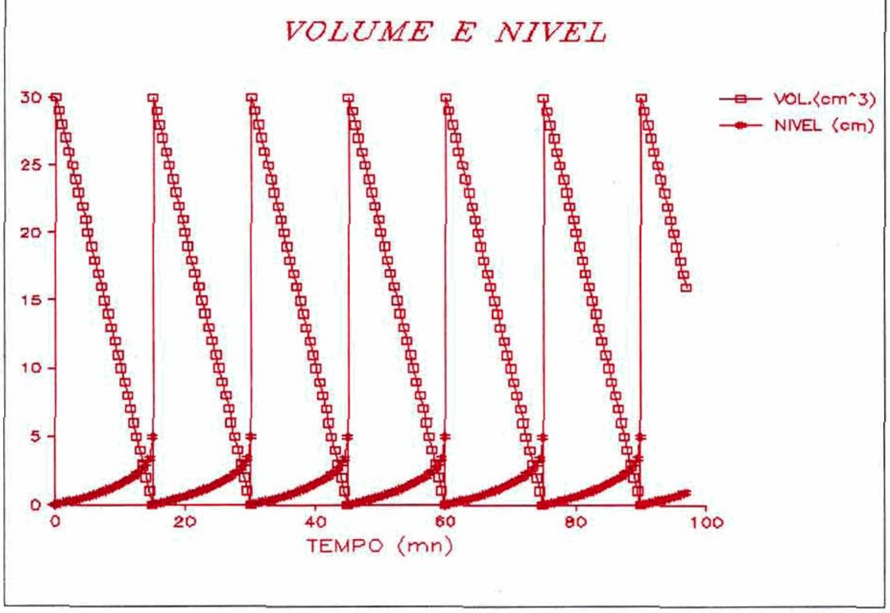


Gráfico 1.3



Provavelmente, a primeira observação que nos ocorre é a de que a Folha de Cálculo não obedece às convenções, a que estamos muito habituados, sobre o *modo de representação gráfica de uma* função. Onde estão as linhas verticais a tracejado e as bolas abertas e fechadas? Ou será que a importância destas questões de rigor fica muito aquém da real compreensão do fenómeno e dos conceitos *matemáticos* que aqui estão envolvidos?

Talvez valha a pena discutir um pouco alguns aspectos que, a este respeito, me parecem fundamentais. Em primeiro lugar, chamarei a atenção para o facto de que todo o processo de construção destas funções na Folha de Cálculo, acentua fortemente a noção intuitiva de que, numa função periódica, há "uma parte do gráfico que se vai repetindo ao longo do domínio". Além disso, torna-se evidente a ideia de que basta conhecer o comportamento da função num intervalo do seu domínio, correspondente a um período, para se poder definir a função em qualquer outro ponto. Esta é, na verdade, a justificação para a criação de uma coluna destinada ao tempo "virtual". Por outro lado, a própria natureza periódica de qualquer das funções tem uma tradução muito concreta no efectivo acto de virar a ampulheta periodicamente. Diria ainda, que a assimilação do significado real dos pontos de descontinuidade da forma $t=15n$, com $n \in \mathbb{N}$, vem naturalmente da observação do que sucede quando voltamos a ampulheta. Num certo instante, o *cone "inferior" está cheio e no instante* seguinte passa a estar vazio. O mesmo se poderá dizer relativamente ao problema dos limites laterais nos pontos de descontinuidade; se o tempo decorrido é suficientemente próximo de 15 mn, mas *é ainda inferior*, o cone receptor está *quase cheio*, ao passo que, se o tempo é suficientemente próximo de 15 mn, mas já superior, o cone receptor está *quase vazio*. Será também oportuno referir a dependência que existe entre o volume de água existente no cone "superior" e o nível que se regista no cone "inferior", que surge de forma nítida no gráfico **1.3**. De facto, torna-se aí bem claro que há uma correspondência entre os máximos relativos da função V e os mínimos relativos da função N, o que quer dizer apenas isto: *se em cima o cone está cheio de água, em baixo o nível é mínimo.*

Não será igualmente de desprezar uma informação que ressalta da leitura do gráfico **1.1**, onde se representa a função N. Trata-se de perceber que a escala do tempo que pretendíamos construir não é uniforme. De facto, as distâncias entre dois traços consecutivos da escala (o equivalente a 0,5 mn), vão sendo cada vez maiores, à medida que o tempo passa. Isto corrobora a ideia intuitiva de que, embora o volume de água esteja a variar de forma constante, o nível do líquido sobe com uma velocidade cada vez maior. Diríamos, em linguagem corrente, que é uma consequência do progressivo afunilamento.

Voltarei ainda à questão da forma dos gráficos, tal como são representados na folha de cálculo, sugerindo que eles poderão constituir um bom pretexto para uma discussão em torno das tais convenções que ensinamos aos nossos *alunos. Ocorre-me, a propósito,* o episódio de um aluno do 11º ano que tentava desesperadamente responder a questões baseadas na interpretação do gráfico de uma função onde apareciam bolas abertas e bolas fechadas. Ao cabo de algum tempo, tornou-se clara a razão dos erros que estava a cometer: para ele, qualquer linha a cheio que tivesse num dos extremos uma bola aberta, não pertencia ao gráfico da função.

Note-se, entretanto, que as funções N e V foram atrás definidas com base numa convenção que é apenas uma entre outras possíveis. Poder-se-ia, por exemplo, ter assumido que nos instantes de viragem da ampulheta não é possível medir, nem o volume, nem o nível. Com este pressuposto, as funções a definir seriam as restrições das funções N e V ao conjunto $\{t: t>0 \text{ e } t\neq 15n, n\in \mathbb{N}\}$.

Saltitando de forma perfeitamente elástica

Num jogo de pinguepongue é natural ver-se uma bola a saltitar. O que cada jogador tenta fazer é imprimir à bola um movimento que a leve a passar por cima da rede para a metade oposta da mesa. Quando a bola lançada toca na superfície da mesa, vai animada de uma certa velocidade **v**, dirigida para baixo e fazendo um ângulo α com a horizontal; se esse choque for perfeitamente elástico, isto é, se não houver dissipação de energia, a bola fará ricochete, adquirindo uma velocidade **v'**, que apenas difere de **v** no sentido da sua componente vertical: $\mathbf{v}=(v_1,-v_2)$ e $\mathbf{v}'=(v_1,v_2)$.

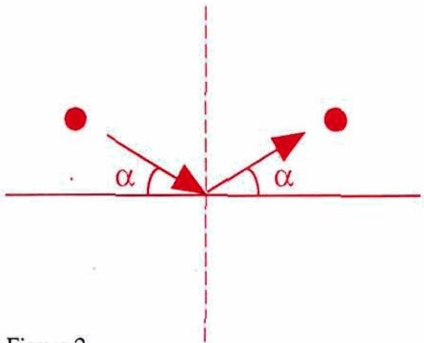
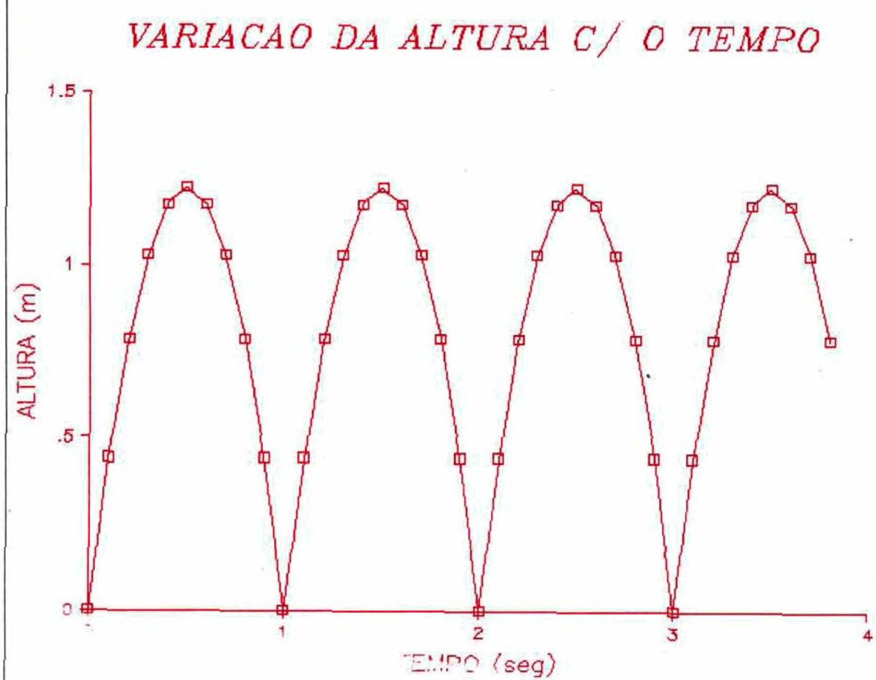


Figura 2

Gráfico 2.1



Logo após o choque, a bola eleva-se no ar e descreve uma trajectória parabólica em virtude da acção da gravidade. A lei que traduz a variação da altura da bola com o tempo é expressa pela equação:

$$y(t) = v.\text{sen}\ \alpha.t - g.t^2/2$$

em que v é o módulo da velocidade inicial (constante) e $g=9.8\ m/s^2$. É ainda possível estabelecer de que modo se comportam os valores da ordenada do vector velocidade, em função do tempo:

$$v_y(t) = v.\text{sen}\,\alpha - g.t$$

A partir daqui, poderemos imaginar uma bola de pinguepongue saltitando indefinidamente, sem nunca perder energia, sobre uma mesa suficientemente grande, e procurar descrever através de duas funções a sua altura em relação à mesa e a sua velocidade "vertical", em cada instante.

Uma possível descrição da variação da altura com o tempo é a que se pode observar no gráfico **2.1**. A obtenção deste gráfico na Folha de Cálculo requer um procedimento análogo ao que foi adoptado na situação anterior.

Foram fixados os seguintes valores:

Velocidade da bola após o 1º choque:
v=9,8 cm/s
Ângulo de inclinação: 30º

Com estes dados e com as equações anteriores, conclui-se que a bola, imediatamente após o 1º choque, ressalta com uma velocidade v_y=4,9 cm/s, volta a tocar no solo (y=0) ao fim de 1 segundo com uma velocidade v_y= - 4,9 cm/s para, logo após o ressalto, ser de novo v_y=4,9 cm/s. Está portanto encontrada a periodicidade da bola saltitante: P=1s. Torna-se então possível definir as seguintes funções:

$$y: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{cases} 4.9t - 4.9t^2 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ y(t-1) & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

$$v_y: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v_y(t) = \begin{cases} 4.9 - 9.8t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 4.9 & \text{se } t = 1 \\ v_y(t-1) & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

que exprimem, respectivamente, a altura da bola e a componente vertical da velocidade como funções do tempo.

Nestas circunstâncias, a construção da tabela de valores na Folha de Cálculo, fez intervir de novo a função MOD, retomando o padrão das 3 colunas: Auxiliar, Tempo Virtual e Tempo Real. Para um período P=1 e um incremento de 0,1 na variável tempo, foram utilizadas as classes de resto de 11.

Dos gráficos que ilustram esta situação (gráficos **2.1, 2.2, 2.3**), salientarei apenas alguns dos múltiplos aspectos relevantes. Não deixa de ser interessante verificar que, apesar de ambas as funções estarem vinculadas ao mesmo fenómeno, a função y é contínua em todo o seu domínio, ao passo que a função v_y tem uma descontinuidade em cada ponto da forma t=n, com $n \in \mathbb{N}$. O gráfico **2.3** mostra-nos ainda que a bola atinge a sua altura máxima exactamente nos instantes em que a velocidade v_y se anula. Esta será, eventualmente, uma boa pista para a formulação da seguinte conjectura: terá a função v_y algo a ver com a derivada da função y e, se assim for, terá a função y derivada em todos os pontos?

Gráfico 2.2

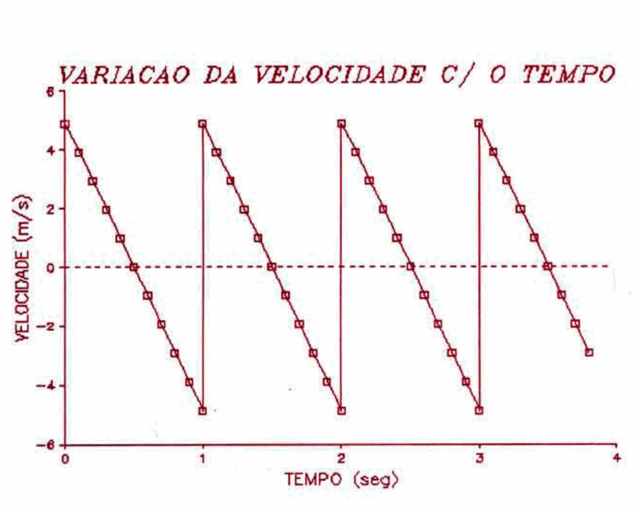


Gráfico 2.3

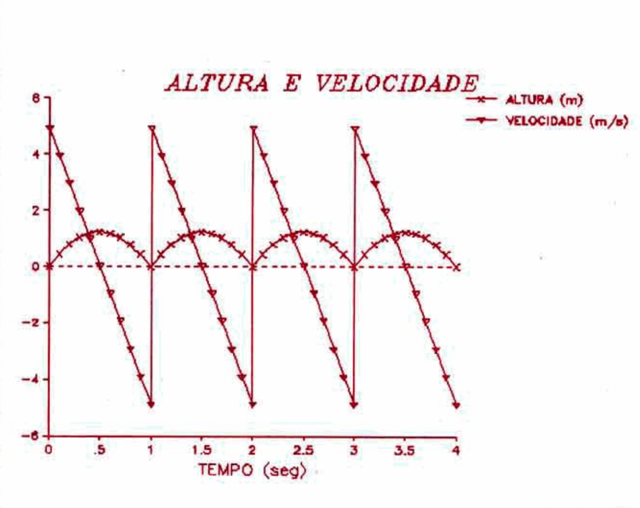


Gráfico 3.1

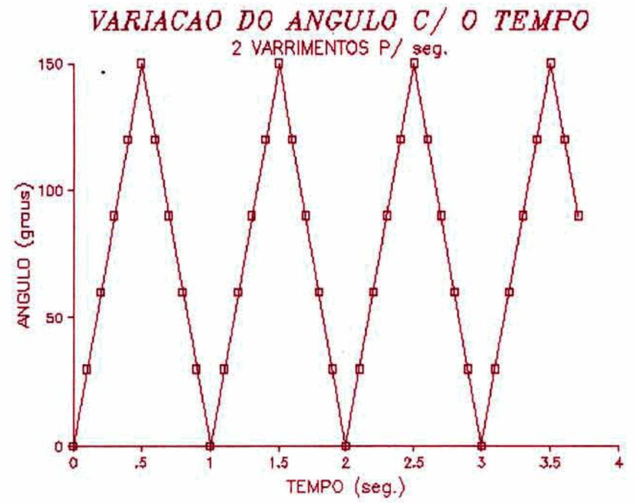
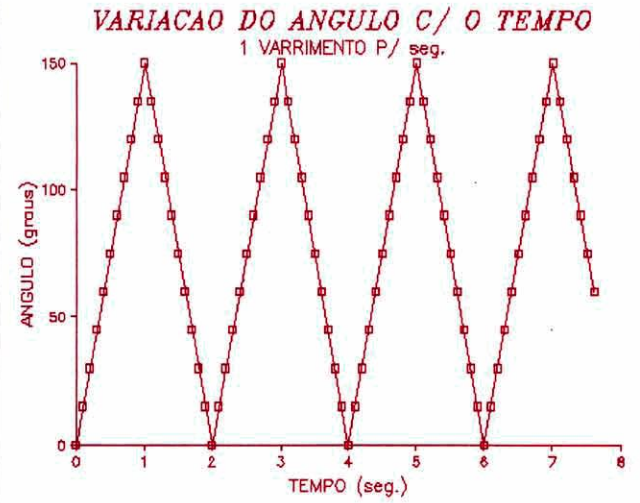


Gráfico 3.2



Ao sabor da chuva

Alguns automóveis estão equipados com limpa-vidros que são, por assim dizer, adaptáveis à intensidade da chuva que cai durante a viagem. Podem funcionar a uma velocidade média para uma chuva moderada, a uma velocidade rápida quando chove torrencialmente, e podem ainda ter um ritmo intermitente (2 varrimentos consecutivos e algum tempo de paragem) no caso de cairem apenas alguns salpicos.

Consideremos então, para simplificar, um daqueles automóveis em que o limpa-vidros tem uma só escova. Suponhamos ainda as seguintes condições:

Ângulo varrido pela escova durante um varrimento: 150°

Frequência rápida do limpa-vidros: 2 varrimentos /s

Frequência moderada do limpa-vidros: 1 varrimento /s

Ritmo intermitente do limpa-vidros: 2 varrimentos num segundo, seguidos de 3 segundos de paragem.

Se admitirmos que a velocidade angular da escova é cons-tante ao longo de cada varrimento, poderemos perguntar como varia a posição angular da mesma ao longo do tempo. Para isso definiremos como posição angular, o ângulo formado pela semirecta suporte da escova, em cada instante, e pela semirecta horizontal que corresponde à posição inicial da escova, quando o limpa-vidros está na situação normal de desligado. Nestas condições, de acordo com os dados anteriores, a posição angular é dada por uma amplitude que varia entre 0° e 150°. Facilmente se percebe que em cada uma das frequências consideradas, a posição angular do limpa-vidros varia de forma linear até atingir um valor máximo de 150° (havendo então uma paragem instantânea da escova), para decrescer em seguida até ao valor mínimo de 0°.

Os gráficos **3.1, 3.2, 3.3** ilustram, em cada um dos casos, a variação da posição angular com o tempo.

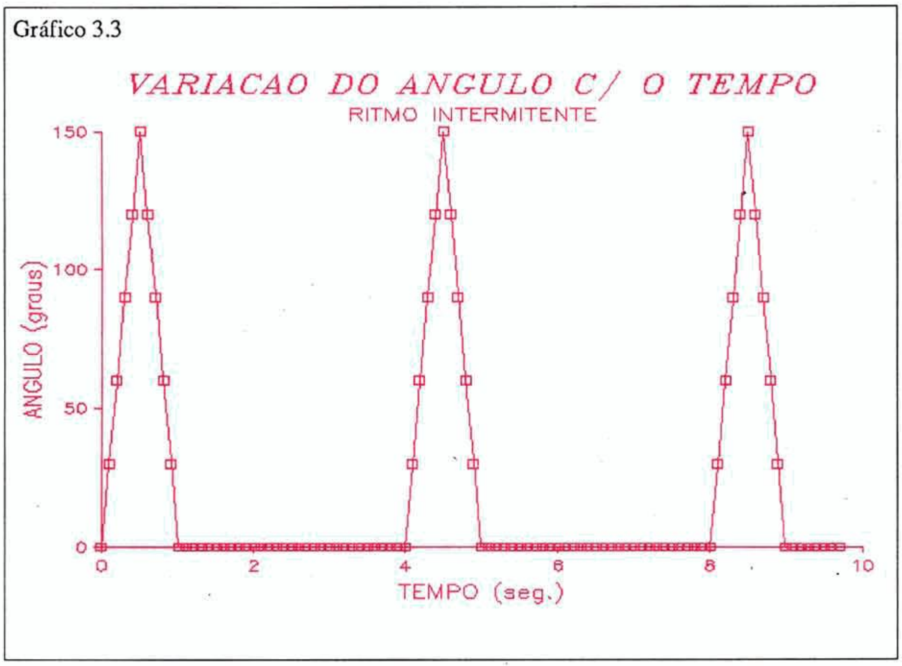


Gráfico 3.3

As três funções que traduzem a variação da posição angular da escova no movimento do limpa-vidros, para as diversas situações de intensidade da chuva, são definidas por:

A_r: $[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$A_r(t) = 150 - |300t - 150|$ se $0 \leq t < 1$
$A_r(t) = A_r(t-1)$ se $t \geq 1$

A_m: $[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$A_m(t) = 150 - |150t - 150|$ se $0 \leq t < 2$
$A_m(t) = A_m(t-2)$ se $t \geq 2$

A_i: $[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$A_i(t) = 150 - |300t - 150|$ se $0 \leq t < 1$
$A_i(t) = 0$ se $1 \leq t < 4$
$A_i(t) = A_i(t-4)$ se $t \geq 4$

Como é óbvio, cada uma destas funções pode ser construida na Folha de Cálculo de acordo com o processo já referido e recorrendo às classes de resto de 11, 21 e 41, respectivamente, para um incremento de 0,1 na variável t. Um pormenor a destacar será o facto de obtermos funções com períodos mínimos diferentes, face a uma mesma situação, o que não sucedia nos exemplos anteriores.

Os exemplos aqui apresentados constituem, antes de mais, uma sugestão de trabalho para o estudo de uma classe de funções, frequentemente negligenciada, mas que merece, por certo, a nossa atenção, não apenas pela sua riqueza do ponto de vista matemático, mas ainda pelo facto de constituir uma importante ferramenta na interpretação e modelação de inúmeros fenómenos reais. O seu tratamento e exploração na Folha de Cálculo acrescenta ao seu valor intrínseco, a possibilidade de associar às funções periódicas conceitos que à partida parecerão algo distantes daquelas, como é o caso das classes de resto da divisão inteira por um número. Isto será, além do mais, uma evidência de que a Folha de Cálculo pode promover elos de ligação entre diversos conceitos matemáticos.

Susana Carreira
Esc. Sec. de Mem-Martins

O problema do trimestre

Dado o curto espaço de tempo decorrido entre a saída do último número de "Educação e Matemática" e a entrada deste número na tipografia, não nos chegou nenhuma resposta ao problema do trimestre anterior. Optámos por dar mais tempo aos leitores e publicar no próximo número da revista as respostas que entretanto nos queiram enviar.

E, desta vez, temos dois problemas que, como verão, são da mesma "família".

1) O "número de ouro" 1,61803398... tem uma particularidade curiosa: o seu inverso, que é 0,61803398..., tem exactamente a mesma parte decimal. Ora existem outros números em que isso acontece: eles e os respectivos inversos têm os mesmos algarismos depois da vírgula. Quais são esses números?

2) Se elevarmos o "número de ouro" ao quadrado obtemos 2,61803398..., ou seja, novamente a parte decimal não se alterou (incrível, não é?). Há mais números em que isto se verifica. Quais são eles?