# À procura de um algoritmo

**Eduarda Moura**

## O PUZZLE

Um problema tipo puzzle proposto no livro A Caixa de Pandora da Matemática é o de encontrar 12 quadrados numa rede quadrada 6x6 de tal forma que em cada linha e coluna estão colocados 2 quadrados e em cada diagonal 1 ou 2 quadrados.

**41**
**DOIS E BASTA!**

O leitor consegue descobrir alguma forma de colorir doze dos quadrados pequenos do quadro 6x6 da direita, de tal modo que fiquem dois quadrados coloridos em cada linha e em cada coluna e não mais do que dois em cada diagonal? (Bolt, 1996, p. 54)

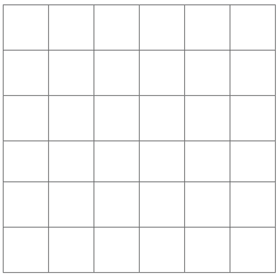

Figura 1. Rede 6x6

Um puzzle que pode ser inventado a partir deste é descrito num artigo, num número anterior desta revista, O *Problema de Baltazar*, em que toda a rede fica colorida em 3 cores: 12 quadrados de uma cor, 12 quadrados de outra cor e 12 quadrados de uma terceira cor, todos colocados segundo as regras impostas no Problema 41 do Bolt para só 12 dos quadrados. Algumas soluções para este puzzle são apresentadas no artigo referido.

Um problema não resolvido neste puzzle é se existe uma outra configuração para uma das cores que não seja a seguinte:

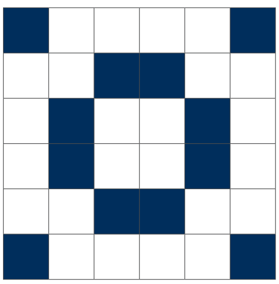

Figura 2

Esta solução é simétrica, mas em outras soluções simétricas não é possível colorir todas as casas da forma descrita. Será a boa distribuição dos quadrados na rede? Este é com certeza um bom problema a explorar.

O problema discutido neste artigo é o de encontrar todas as soluções quando a primeira das cores é colocada segundo a configuração da figura 2.

## UMA ABORDAGEM SISTEMÁTICA

O que será uma abordagem sistemática ao problema proposto? É a de encontrar um processo tal que todas as soluções são geradas. Dessa forma encontraríamos uma demonstração que nos daria a certeza sobre quantas e quais são todas as soluções do puzzle inventado a partir do Problema 41 do Bolt. É tentador pensar que dado ser simplesmente um problema de escolha entre duas hipóteses que será fácil programar um computador para as gerar todas.

Caso seja esse o caso, uma demonstração por computador seria então o que chamaríamos a esta demonstração e de tipo exaustivo, ou seja que exibiria todas as soluções. Vejamos a diferença entre os dois tipos de demonstração:

A. Demonstração feita, ou auxiliada, por computador: o computador pode ajudar a subdividir o problema em casos disjuntos, ou casos cuja interseção é conhecida e identificar um problema já resolvido com que o problema dado pode ser modelado e sabemos assim que existem soluções, quantas soluções existem, ou se existem soluções.

B. Demonstração do tipo exaustivo: podemos subdividir também o problema em casos disjuntos e encontrar maneira de programar o computador para gerar as soluções. Neste caso a demonstração exibe todos os casos.

No entanto, para a demonstração de tipo exaustivo poder ser feita por um computador é necessário inventar o algoritmo que gera as soluções antes de programar o computador.

Um só algoritmo para gerar todas as soluções seria o ideal e poderíamos ver no final se encontraríamos alguma estrutura para o conjunto das soluções, por exemplo, um grupo e uma operação que as relacionasse. Um grupo de transformações seria o que pensaríamos primeiro dado que se encontram soluções que são reflexões ou rotações de outras soluções.

Sem querer entrar em teoria de demonstração que se tem provado limitada para o trabalho de fazer demonstrações, muitas demonstrações por computador têm sido feitas, algumas famosas como a do Teorema das Quatro Cores, e cujos métodos foram debatidos durante muitos anos antes da geração de software para fazer demonstrações explodir no mercado.

Insistindo na validade de uma demonstração feita, ou auxiliada por computador, teremos de exigir que um algoritmo seja inventado para que a demonstração conduza a resultados fiáveis ou pelo menos com alguma ordem de viabilidade. Ou seja, qualquer outro matemático ou matemática que programe o computador com um algoritmo para fazer uma demonstração encontre resultados que estejam logicamente relacionados com a demonstração com base no primeiro algoritmo.

## A GERAÇÃO DE UM CONJUNTO DE SOLUÇÕES

Vamos agora descrever um processo através do qual todas as soluções parecem ser geradas. O sistema é o seguinte:

Dadas as 4 casas centrais na configuração da figura 2. Temos as seguintes possibilidades, que definem casos a partir dos quais é possível prosseguir para outras escolhas:

Caso 1 Caso 2 Caso 3 Caso 4

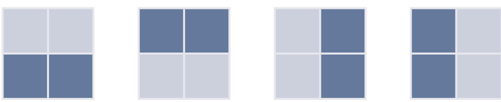

Figura 3

Os últimos três casos conduzem a soluções que como esperávamos são reflexões, ou rotações, do primeiro caso. De facto, só temos duas soluções:

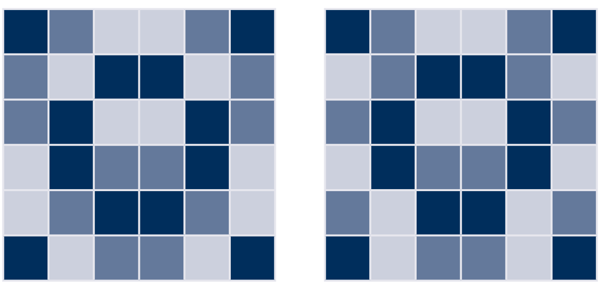

Figura 4

Foi excluída a escolha das 4 casas centrais de uma só cor, dado que não conduz a nenhuma solução como o leitor pode facilmente verificar.

Os restantes casos são então:

Caso 5 Caso 6

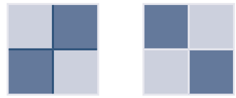

Figura 5

Seria de esperar que também neste caso as soluções de um dos casos seriam transformações das soluções do outro caso. Tal não acontece como veremos. O processo de geração procede da seguinte forma: dadas as quatro casas centrais várias outras casas ficam determinadas:

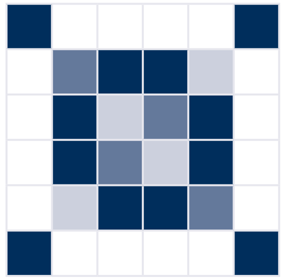

Figura 6

Podemos agora fazer outra escolha, por exemplo, as escolhas cor 1 e cor 2 para a casa (1,3), são duas:

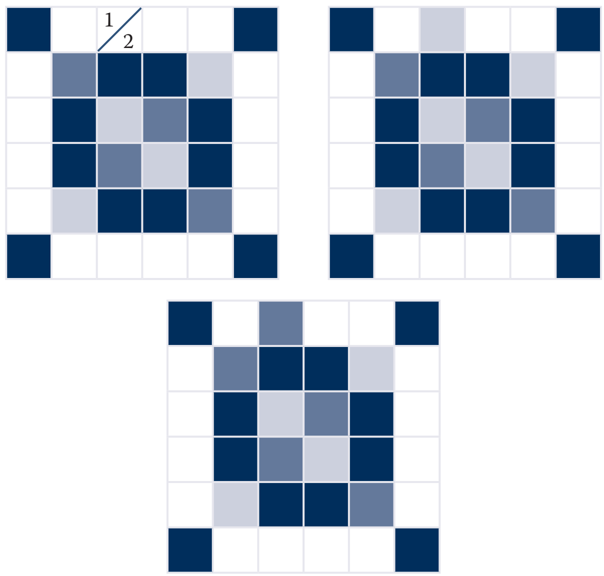


Figura 7

E as casas que ficam determinadas com essas escolhas são, respetivamente:

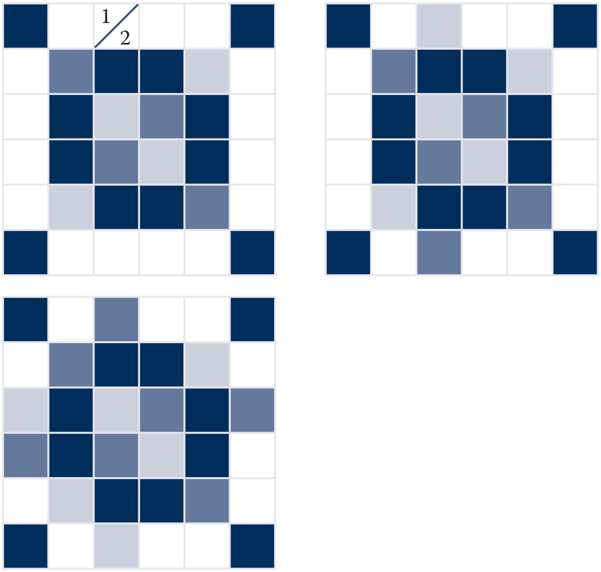


Figura 8

Prosseguindo por etapas conseguimos determinar todas as casas. Este processo por etapas conduz às soluções da figura 9:

13 para o Caso 5, e

9 para o Caso 6.

Contudo a menos de rotações e reflexões são somente 13 soluções (ver Tabela 1).

Tabela 1

| Congruentes a menos de rotações | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ |
| E | $e_{10}$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_{11}$ | $e_5$ | $e_4$ | $e_8$ | $e_7$ | $e_1$ |
| e reflexões | | | | | | | | | |
| F | $f_3$ | $f_4$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | | | | |
| E | $e_9$ | $e_5$ | $e_8$ | $e_{12}$ | $e_{11}$ | | | | |

Com as duas do Caso 1, e a menos de reflexões e rotações, temos 15 soluções ao todo (figura 9).

## AS SOLUÇÕES EM PERSPETIVA

E agora? Temos todas as soluções! Parece que sim! Porquê? Porque encontramos um processo exaustivo que produz um conjunto de soluções que esgota todas as possibilidades. E, de facto, podemos ter a certeza que existe um algoritmo para o qual um computador poderia gerar estas soluções. Mas nada garante até agora que todas as soluções do puzzle das três cores foram obtidas. Com outras escolhas não se obtêm todas as soluções. Por exemplo, se começarmos a fazer escolhas na casa (3,6) conseguimos um conjunto de soluções que é diferente do conjunto do Caso 5, ficam a faltar as soluções e6, e12 e e13. Uma solução que não pertence ao conjunto E é a seguinte:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | 2 | 1 | 2 | 1 | X |
| 1 | 2 | X | X | 1 | 2 |
| 2 | X | 1 | 2 | X | 1 |
| 1 | X | 2 | 1 | X | 2 |
| 2 | 1 | X | X | 2 | 1 |
| X | 1 | 2 | 1 | 2 | X |

Figura 10

Para termos a certeza que encontramos todas as soluções teríamos de verificar todas as escolhas. Uma demonstração difícil de realizar. Um computador poderia gerar todos os conjuntos de configurações fazendo a escolha 1 e depois a escolha 2 para cada casa. Seriam geradas $2^{24}$ configurações (16 777 216). Muitas dessas escolhas não levariam a uma solução, mas seria a forma de determinar se o conjunto gerado contém todas as soluções. De notar que não teríamos uma demonstração porque seria necessário um olho humano para identificar as soluções. Seria uma demonstração auxiliada por um computador.

Com o algoritmo acima indicado, que pode ser generalizado a nxn casas, é produzido um algoritmo programável (penso eu, que simples, uma matriz pode modelizar as escolhas da rede 6x6) que gera as soluções. E até um puzzle digital pode ser feito posteriormente para a pequenada poder desenvolver a sua perceção espacial.

Uma outra questão é se o conjunto acima indicado pode ter qualquer tipo de estrutura. Como não aparenta ter qualquer estrutura podemos ficar desconfiados relativamente ao algoritmo acima indicado poder gerar todas as soluções. E da desconfiança na matemática nasce a inspeção e da inspeção outras ideias e observações podem ser feitas. Fica aqui a ideia para alguém descobrir um algoritmo que as produza a todas. Teríamos então uma demonstração automatizada para o problema.

## Referências

Bolt, B. (1996) A caixa de Pandora da Matemática. Gradiva.

Moura, E. (2015). O problema do Baltazar. Educação e Matemática, 134: Setembro-Outubro, APM, Lisboa.

Wikipédia, Automated theorem proving https://en.wikipedia.org/wiki/Automated_theorem_proving – [Dezembro, 2015].

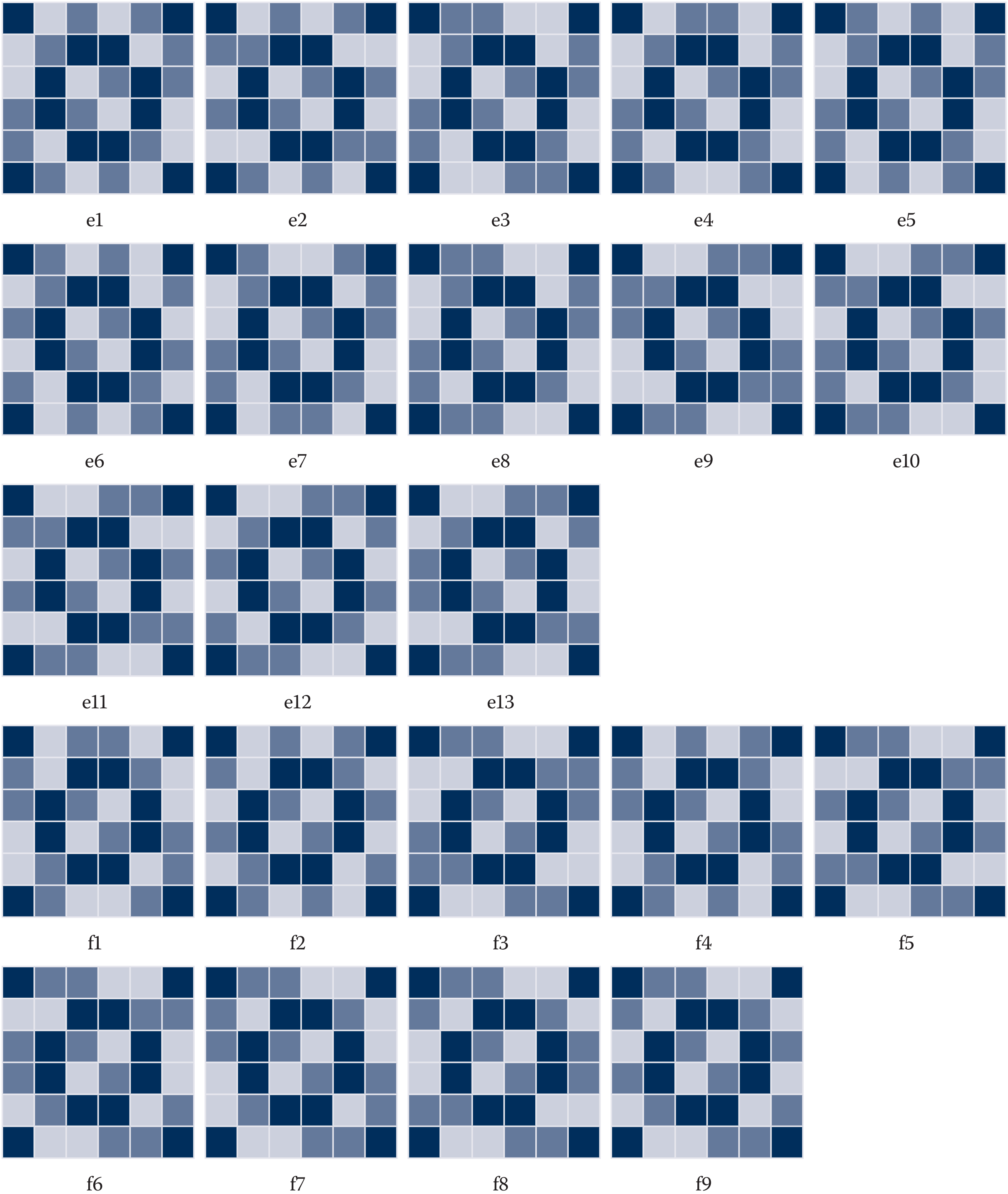


Figura 9

**Eduarda Moura**